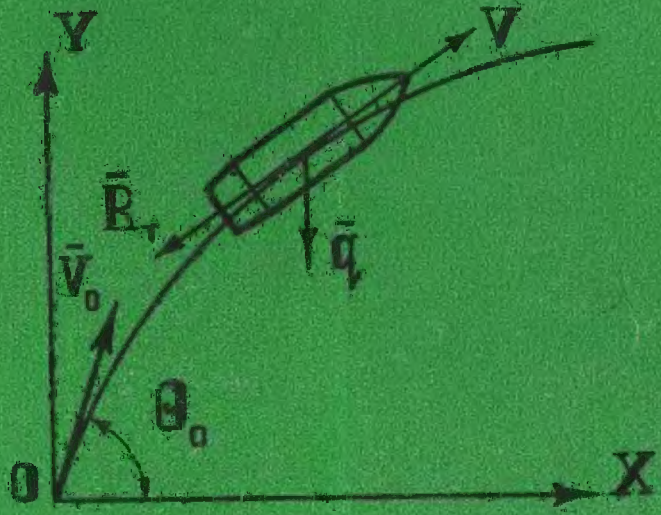
VISIT…

Для служебного пользования

Экз. №

А. А. КОНОВАЛОВ, Ю. В. НИКОЛАЕВ



ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

1979

Для служебного пользования

Экз. №

А. А. КОНОВАЛОВ, Ю. В. НИКОЛАЕВ

ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Под редакцией
д-ра техн. наук А. А. КОНОВАЛОВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов

1979

УДК 623.54+531.55(075.8)

Коновалов А. А., Николаев Ю. В.

Внешняя баллистика. — М., ЦНИИ информации, 1979, 228 с.

В книге изложены теоретические основы внешней баллистики артиллерийских снарядов и пуль. Приведены сведения о силах и моментах, действующих на снаряд в полете, дана методика составления дифференциальных уравнений движения снаряда как твердого тела. Для решения этих уравнений предложен метод последовательных приближений. Рассмотрены аналитические и численные методы решения основной задачи внешней баллистики с применением ЭВМ. Приведены основы теории поправок, методы составления поправочных формул внешней баллистики и вычисления баллистических производных. Подробно разобрано движение вращающегося, реактивного и оперенного снарядов около центра масс.

Книга является учебным пособием для студентов высших технических учебных заведений, а также может быть полезна инженерно-техническим работникам.

Рецензент
д-р техн. наук Б. В. ОРЛОВ

© ЦНИИ информации, 1979.

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее время в развитии баллистики как науки произошли существенные изменения. Применение ЭВМ значительно расширило возможности баллистических исследований, появились работы по оптимизации параметров ствольных систем, резко повысилась техническая оснащенность, а следовательно, и точность баллистического эксперимента.

В настоящей книге во введении сформулированы основные задачи, решаемые в курсе внешней баллистики, приведены сведения из истории развития внешней баллистики, даны основные понятия и определения.

В главах I и II рассмотрена теория движения снаряда в воздухе, определена связь баллистики с аэродинамикой и теоретической механикой. В главе III даны аналитические и численные методы решения основной задачи внешней баллистики. Глава IV посвящена вопросам вычисления поправок на отклонение элементов траектории снарядов от их значений, подсчитанных для нормальных метеоусловий на Земле, и исходных данных, соответствующих техническим заданиям на снаряд. В главе V исследованы уравнения движения снаряда около центра масс в координатах Эйлера и А. Н. Крылова. В главе VI разобрано формирование начальных условий движения снаряда (пули), изучен вопрос о влиянии движения снаряда около центра масс на движение самого центра масс, оценено влияние запаса гироскопической устойчивости на рассеивание пуль. Последняя VII глава знакомит читателя с методами экспериментальных исследований, применяемыми во внешней баллистике.

Изложенный баллистический расчет дает все необходимые данные о траектории снаряда и характеристиках движения, исходя из которых можно выбрать параметры ствольной системы.

Введение, главы I—III, V и параграфы 4.1—4.10, 6.1, 6.4 написаны А. А. Коноваловым, глава VII и параграфы 4.11—4.13, 6.2, 6.3 — Ю. В. Николаевым.

ВВЕДЕНИЕ

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

Внешней баллистикой называется наука о движении снарядов (пуль) и ракет после вылета их из канала ствола или схода с направляющих. До сравнительно недавнего времени баллистика изучала почти исключительно движение снаряда постоянной массы. Качественное изучение движения ракет являлось предметом специальных разделов механики (механика тел переменной массы). И только в связи с бурным развитием ракетной техники в годы, предшествовавшие второй мировой войне, и особенно после нее, наука о движении ракет стала неотъемлемой частью баллистики и даже вылилась в самостоятельную науку. Поскольку, однако, ствольное оружие в основном стреляет снарядами постоянной массы, в настоящей книге излагаются вопросы, связанные с их движением. Простейшие случаи движения ракет описываются в виде дополнения к соответствующим разделам.

Конечной целью предмета внешней баллистики является составление таблиц стрельбы, позволяющих расчету правильно наводить орудие на цель с учетом конкретных (главным образом атмосферных) условий стрельбы, а также определение исходных данных для проектирования орудий и снарядов. Решению этих задач предшествует изучение закономерностей движения тяжелого тела в воздухе.

На выброшенное под углом к горизонту и с определенной скоростью тело действует сила тяжести и комплекс аэродинамических сил и моментов. Изучение закономерностей изменения сил, действующих на снаряд в полете, является одной из задач внешней баллистики.

Движение продолговатого снаряда, обладающего шестью степенями свободы, описывается системой дифференциальных уравнений двенадцатого порядка с неразделяющимися переменными. Даже при известных силовых факторах решение такой системы крайне трудоемко и неудобно для практического использования.

При этом иногда возникают непреодолимые трудности экспериментального и теоретического определения отдельных составляющих аэродинамических сил, связанные с их нестационарностью. Даже важнейшие составляющие аэродинамических сил приходится принимать по усредненным значениям. Поэтому целесообразно движение центра масс снаряда и движение его около центра масс изучать раздельно, вводя в дальнейшем экспериментальные коэффициенты согласования с опытом. Часть коэффициентов (например, коэффициент или функция лобового сопротивления) оказывается при этом достаточно универсальной, относящейся к большому классу снарядов. Другая часть (например, коэффициент формы снаряда) отражает индивидуальные свойства снарядов определенного образца.

Существенную роль в пространственном положении траектории снаряда играют многочисленные случайные или неучитываемые в уравнениях движения факторы. К числу первых относятся, например, отклонения масс снарядов от номинального значения, вызванные технологическими погрешностями; массовая и химическая неоднородность зарядов; изменение метеорологических условий. Из неучитываемых факторов отметим влияние кривизны и вращательного движения земного шара, особенно заметное при движении дальнобойных снарядов.

Если факторы влияют на полет снаряда систематически, то положение траектории в пространстве может быть исправлено путем изменения начальных данных. Так, при подготовке стрельбы из крупнокалиберной артиллерии все снаряды разбиваются на группы по массе, одинаковой в определенных пределах, тщательно изучаются метеорологические условия с тем, чтобы скорректировать установку прицельных приспособлений. Раздел внешней баллистики, изучающий отклонения траекторий от расчетной под влиянием известных по величине (и направлению) факторов, называется теорией поправок.

Учет большого числа факторов, влияющих на отклонение траекторий, оказывается либо невозможным, либо нецелесообразным. Невозможно заранее предугадать, например, отклонение угла вылета снаряда, вызванное колебаниями ствола и орудия в целом. Экономически нецелесообразно разбивать на группы по массе пули стрелкового оружия. Распределение точек попадания выступает в этом случае как случайная величина.

Определение коэффициентов согласования с опытом, предшествующее составлению таблиц стрельбы (или проектированию прицельных приспособлений), в силу сказанного, требует многократного повторения эксперимента. Необходимо иметь свод правил, обеспечивающих получение надежных результатов при минимальном числе стрельб.

Таким образом, основное содержание баллистики ствольных систем составляют следующие задачи.

1. Изучение аэродинамических сил, действующих на снаряд в полете. При этом должна быть найдена форма снаряда, обеспечивающая без существенного ослабления могущества действия его у цели минимальное сопротивление воздуха и, следовательно, максимальную дальность полета.

2. Изучение траектории движения центра масс снаряда в воздухе — основная задача внешней баллистики. Прямая задача заключается в определении параметров траектории по заданным начальным данным. Обратная задача — в определении одного из начальных параметров по установленным координатам точки падения снаряда (координатам цели). Могут быть и специальные задачи, когда, например, нужно обеспечить не только попадание в цель, но и достижение требуемой скорости встречи снаряда с целью.

3. Изучение движения снаряда около центра масс с целью обеспечения устойчивости снаряда на траектории.

4. Разработка теории поправок, позволяющей учесть влияние на траекторию некоторых известных по величине факторов, изменяющихся от выстрела к выстрелу или от стрельбы к стрельбе.

5. Изучение рассеивания снарядов под воздействием случайных факторов и влияния этого рассеивания на результаты стрельбы; разработка методики составления таблиц стрельбы.

6. Нахождение оптимального решения задач внешней баллистики на основе заданных тактико-технических требований при проектировании новых образцов оружия.

Для решения перечисленных задач постоянно применяются наиболее современные и эффективные методы экспериментальных и теоретических исследований. Важное прикладное значение теории полета снаряда побуждало многих математиков и физиков всех времен уделять значительное внимание развитию внешней баллистики.

2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

Простейшие метательные орудия — праща, лук со стрелами — были известны человеку с глубокой древности. Довольно высокая меткость этих орудий обеспечивалась навыками и искусством стрелка. По мере развития и усложнения метательной техники, появления тяжелых баллист и катапульт совершенствовались и эмпирические правила наведения орудий на цель.

Первую попытку осмыслить законы движущегося в воздухе тела сделали философы античности в своем стремлении создать общую картину мироздания. Аристотель (384—322 гг. до н. э.) выдвинул сложную и противоречивую теорию движения тел, брошенных под углом к горизонту. Архимед (287—212 гг. до н. э.) — творец совершеннейших по тому времени военных метательных машин — первым дал конкретное представление о форме траекто-

рии снаряда. Он считал, что брошенное под углом к горизонту тело движется по спирали. Несмотря на созерцательный характер мировоззрения авторов античности, их исследования в области механики и геометрии явились тем фундаментом, на котором много веков спустя развились наиболее плодотворные идеи механики и, в частности, баллистики.

В середине XIV в. философом Парижского университета Буриданом была предложена новая теория «импетуса», господствовавшая в механике два столетия. Эту теорию развивали и пропагандировали такие выдающиеся ученые, как Леонардо да Винчи и Галилей. Импетус — прообраз современного понятия о количестве движения, хотя его смысл не отражал законов движения тел, тогда еще не открытых, а основывался на чисто геометрических соображениях.

Леонардо да Винчи на основании теории импетуса исследовал вопрос о форме траектории снаряда в воздухе, которую он представлял в виде начального прямолинейного и последующего криволинейного участков, хотя в записках ученого был обнаружен чертеж траектории в виде параболы. Леонардо да Винчи обратил внимание на необходимость учитывать влияние сопротивления воздуха на движение снаряда и высказал некоторые соображения о величине этого сопротивления.

В XVI в. огнестрельная артиллерия прочно вошла в состав вооружения армий. Артиллерийская практика настоятельно требовала разработки надежных и простых методов составления таблиц стрельбы, уточнения некоторых эмпирических правил.

Становление внешней баллистики как прикладной науки связано с именем итальянского ученого Тартилья, опубликовавшего в 1537 г. фундаментальный труд под названием «Новая наука». В основе его представлений о траектории лежала теория импетуса. Исследуя свойства траектории, Тартилья первым установил пропорцию, связывающую дальность полета снаряда с начальным углом вылета. Знание этой пропорции во много раз сокращало количество опытных стрельб, необходимых для составления таблиц стрельбы (сам Тартилья утверждал, что для составления таблиц требуется всего один выстрел — о рассеивании снарядов еще не было известно). Тартилья первым обнаружил, что наибольшая дальность в случае стрельбы тяжелыми снарядами получается при угле бросания 45°. Траектория Тартильи и разработанные им правила составления таблиц стрельбы вошли в руководства по артиллерии всех стран и просуществовали в них более ста лет вплоть до признания артиллеристами трудов Галилея. В русские артиллерийские руководства таблицы Тартильи вошли после изложения его теории в «уставе ротных, пушечных и других дел», написанном О. Михайловым в 1606—1620 гг.

Исследования в области механики Галилей начал с изучения падения тяжелых тел. Свои теоретические рассуждения он подкрепил опытами, бросая шары из различных материалов с башни

и спуская их по наклонной плоскости. Эти опыты положили начало экспериментальной физике. В результате Галилей установил равноускоренное движение падающих тел, о котором его предшественники (в частности, Леонардо да Винчи) смутно догадывались. В изданном в 1638 г. трактате «Беседы» Галилей, разложив движение тела, брошенного параллельно горизонту, на равномерное горизонтальное и равноускоренное вертикальное, доказал, что траектория такого движения является параболой. Несколько позже (1644) Торичелли распространил это доказательство на более общий случай бросания тел под углом к горизонту.

Изучением сопротивления воздуха занимались многие ученые того времени, в том числе Декарт и Гюйгенс, однако окончательная формулировка задачи принадлежит Ньютону. Он исходил из того, что воздух представляет собой совокупность равномерно распределенных и не связанных между собой частиц. При ударе о поверхность эти частицы получают определенную кинетическую энергию, затормаживая тем самым движение тела. Применив уравнения количества движения и сохранения кинетической энергии, Ньютон установил (1687), что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения тела, площади его поперечного сечения и плотности воздуха. Сейчас известно, что квадратичный закон сопротивления справедлив для дозвуковых скоростей. Коэффициент пропорциональности Ньютон определял из опыта. Ньютон впервые поставил вопрос об образующей тела вращения, обеспечивающей наименьшее сопротивление воздуха, и провел первое исследование в этой области. В разное время над решением этого вопроса работали такие выдающиеся ученые, как Иоганн Бернулли, Лопиталь, Эйлер и Лагранж. Он не перестает быть актуальным и в наши дни.

Разработка теории движения снаряда при квадратичном законе сопротивления велась учеными Германом, Бернулли и нашла свое теоретическое завершение в трудах Эйлера. Считая плотность воздуха неизменной по высоте, Эйлер проинтегрировал уравнение годографа скорости, после чего нахождение координат центра тяжести снаряда свелось к квадратурам. На основании метода Эйлера и более поздних его усовершенствований многими авторами были составлены таблицы стрельбы, среди которых наибольшую известность получили таблицы Отто (1883). Большое значение для развития баллистики имели полученные Эйлером дифференциальные уравнения движения твердого тела, которые легли в основу теории движения снаряда около центра масс.

Квадратичная зависимость закона сопротивления от скорости вызвала сомнение уже у физиков XVIII в. Талантливым английским экспериментатором Робинсоном был изобретен баллистический маятник и в 1740 г. были опубликованы первые опыты по определению силы сопротивления воздуха стрельбой. Эти опыты показали, что квадратичный закон сопротивления справедлив только для скоростей до 240 м/с (для сферических снарядов). По

мере увеличения скорости снаряда закон сопротивления все более отклоняется от квадратичного. Опыты эти были известны Эйлеру, и он попытался внести соответствующие коррективы в свой метод. Однако квадратичный закон долгое время оставался основным в баллистических исследованиях. Окончательный отказ от него произошел только во второй половине XIX в. в связи с резким увеличением мощности огнестрельного оружия и переходом на нарезную артиллерию со стрельбой продолговатыми снарядами. Надо было изучать сопротивление воздуха в широком диапазоне скоростей, а для определения условий устойчивого полета снаряда необходимо было изучить его движение около центра масс.

Выдающуюся роль в развитии баллистики продолговатых снарядов сыграл русский артиллерист и ученый Н. В. Маиевский (1823—1892), первые научные работы которого были посвящены баллистике сферических снарядов. В 1858—1859 гг. под непосредственным руководством Маиевского проводились сравнительные стрельбы из гладкоствольных и нарезных орудий, выявившие полное преимущество последних. Эти испытания способствовали принятию нарезных орудий на вооружение русской армии. С тех пор вся дальнейшая научная деятельность Маиевского была связана с изучением проблем движения вращающегося артиллерийского снаряда. Первая его работа по этому вопросу «О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе», опубликованная в 1865 г., получила широкое признание не только в России, но и за границей. В 1867 г. за эту работу Маиевскому была присуждена большая Михайловская премия (первую такую премию Маиевский получил в 1858 г. за труд «О давлении пороховых газов на стены орудия и о приложении результатов опытов, проведенных на этот предмет в Пруссии, к расчету толщины стен орудий»).

Опыты Маиевского (1868—1869) по изучению сопротивления воздуха движению снарядов различного типа позволили получить известные формулы. Сопротивление воздуха было представлено в виде степенной зависимости, показатель которой принимает различные значения в определенных диапазонах скоростей (зональный закон сопротивления). Эти формулы положили начало новой эпохи в развитии внешней баллистики и вскоре стали известны далеко за пределами России.

Помимо научной деятельности, Маиевский принимал непосредственное участие в разработке новых образцов нарезных орудий, превосходивших аналогичные иностранные орудия. Некоторые из этих образцов были приняты на вооружение и за границей.

Велики заслуги Маиевского в деле подготовки русских артиллерийских офицеров и ученых. Написанный им в 1870 г. «Курс внешней баллистики» оставался длительное время лучшим в мировой литературе, а в некоторых разделах сохраняет актуальность и по сей день. Заслуги генерала от артиллерии заслуженного ординарного профессора Михайловской Артиллерийской Академии

Н. В. Маиевского были высоко оценены его современниками, он был награжден многими русскими орденами, избирался почетным членом Михайловской Артиллерийской академии и Московского университета. В 1878 г. Н. В. Маиевский был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

Труды Маиевского были развиты его учеником и преемником по должности профессора кафедры баллистики Михайловской Артиллерийской академии Н. А. Забудским (1853—1917). Забудский первым в мире получил расчетную формулу для определения крутизны нарезов, обеспечивающей устойчивость снаряда в полете, продолжил опыты Маиевского по определению закона сопротивления воздуха, установив этот закон в диапазоне скоростей 700—1000 м/с. В 1895 г. Забудский издал курс «Внешняя баллистика», в котором отразил итоги работ в области баллистики за несколько лет. Большое значение для дальнейшего развития баллистики имела другая его работа «Теория вероятностей и ее применение к стрельбе и пристрелке» (1898), в которой были заложены основы теории поправок.

Опыты по определению силы сопротивления воздуха проводились одновременно во многих странах. В Англии в 1866—1870 гг. велись эксперименты с продолговатыми снарядами калибра 7,62—299 мм в диапазоне скоростей 230—520 м/с. В 1884 г. Хойхель в Голландии производил опыты со снарядами калибра 80—400 мм. В 1879—1896 гг. фирмой Крупп были испытаны снаряды большого удлинения в диапазоне скоростей 150—910 м/с.

В 1896 г. итальянским ученым-артиллеристом Сиаччи были систематизированы все опубликованные к тому времени результаты опытов по определению закона сопротивления воздуха и предложена формула, выражающая этот закон. Функция лобового сопротивления (коэффициент при квадрате скорости) Сиаччи была принята во многих странах, в том числе и в России, и просуществовала без изменений вплоть до 20—30-х годов нашего столетия. Еще раньше, в 1880 г., Сиаччи разработал приближенный аналитический метод решения задачи внешней баллистики для прицельной стрельбы, не потерявший значения до настоящего времени.

Особенно бурное развитие получила внешняя баллистика после Великой Октябрьской Социалистической революции. В 1918 г. решением Советского правительства была создана постоянно действующая комиссия особых артиллерийских опытов (КОСАРТОП). Комиссия обобщала опыт первой мировой войны, определяла перспективы развития артиллерии, изучала физику процессов и уточняла зависимости внешней и внутренней баллистики. В ней плодотворно трудились крупнейшие ученые-артиллеристы В. М. Трофимов (председатель), Н. Ф. Дроздов, Г. П. Киснемский, академики А. Н. Крылов, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин. Руководя работой комиссии, В. М. Трофимов (1865—1926) исследовал и опубликовал актуальные вопросы стрельбы и баллистики, разработал проект пушки для сверхдальней стрельбы (на дальность

более 100 км). Из ранних работ В. М. Трофимова следует отметить труды «О теоретическом определении вероятных отклонений отдельных траекторий от средней» (1895 г., отмечен малой Михайловской премией) и «Действие шрапнели при стрельбе из трехдюймовой полевой пушки» (1903 г., удостоен премии генерала Рассказова и большой Михайловской премии).

В перечне трудов знаменитого русского теоретика кораблестроения акад. А. Н. Крылова видное место занимают работы по артиллерии. Среди них статья «Об организации управления артиллерийским огнем и опытах для определения меткости судового огня», (1909), исследования по применению индикатора Уатта для записи давления пороховых газов в канале ствола, исследования по колебаниям стволов и др. Однако наиболее значительные работы в области баллистики относятся к периоду деятельности А. Н. Крылова в КОСАРТОПе. В 1920 г. им разработан метод численного решения уравнений внешней и внутренней баллистики, широко применявшийся для составления таблиц стрельбы вплоть до появления быстродействующих ЭВМ. В связи с необходимостью увеличения дальности стрельбы и проектированием сверхдальнобойной артиллерии возникла проблема обеспечения устойчивости снаряда вблизи вершины траектории, особенно при движении в разреженных слоях атмосферы. При решении этой проблемы А. Н. Крылов применил оригинальный способ составления и интегрирования уравнений движения снаряда около центра масс, впоследствии развитый профессором Б. Н. Окуневым.

Академиками Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным исследовался вопрос о наивыгоднейшей форме снаряда, возникший после первой мировой войны в связи с необходимостью увеличения дальности стрельбы существующих орудий. Он был успешно решен в КОСАРТОПе. Так, дальность стрельбы трехдюймовой полевой пушки благодаря улучшению аэродинамической формы снаряда была увеличена с 8 до 12 км.

Профессор Д. А. Вентцель в основном завершил разработку современной теории поправок. Он же описал движение снаряда около центра масс с учетом всех составляющих аэродинамических сил и моментов, а также создал теорию движения около центра масс оперенных снарядов. С 1927 г. в Советском Союзе при составлении таблиц стрельбы используют «нормальную атмосферу», предложенную Д. А. Вентцелем на основании статистической обработки метеорологических данных за много лет.

Большой вклад в развитие внешней баллистики внес акад. В. С. Пугачев. Им были решены совместно шесть дифференциальных уравнений, которыми описывается движение снаряда как твердого тела. Были разработаны новые, более совершенные методы численного интегрирования, улучшена методика составления таблиц стрельбы наземной, зенитной артиллерии и стрелкового оружия.

В 20-х годах нашего столетия, в связи с переходом на снаряды новой формы, во многих странах проводились опыты по уточнению закона сопротивления воздуха. Наиболее известными являются опыты Гаврской комиссии (научно-исследовательский орган морской артиллерии), проведенные в 1921—1923 гг. Обработав результаты этих опытов, Гарнье выразил закон сопротивления в виде двух функций для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей. В месте перехода от одной функции к другой образуется угловая точка, что не согласуется с физическими представлениями о законе сопротивления и является недостатком закона Гарнье. В 1930 г. коллектив кафедры внешней баллистики Артиллерийской академии им. Дзержинского заново обработал результаты опытов Гаврской комиссии и предложил закон сопротивления в виде таблиц, получивший название «закона 1930 г.» В конце 30-х годов были начаты опыты по определению закона сопротивления для снарядов сложившейся к тому времени формы. Эти опыты были завершены уже в период Великой Отечественной войны и представлены в виде табличного закона, получившего название «закона 1943 г.». Был существенно уточнен закон сопротивления для скоростей в диапазоне 1000—2000 м/с. Уменьшение абсолютного значения функции лобового сопротивления (рис. 1) свидетельствует об улучшении аэродинамических форм снарядов.

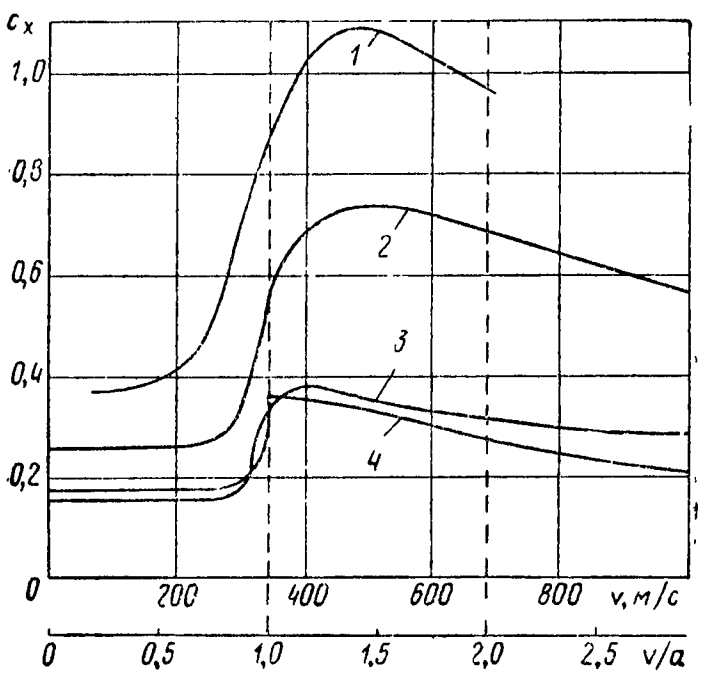


Рис. 1. Значения функции лобового сопротивления для снарядов различной формы:
1 — сферический снаряд; *2* — по закону Сиаччи: *3* — по закону 1943 г.; *4* — по закону 1930 г.

В развитии ракетной техники ведущее место принадлежит русским и советским конструкторам и ученым. Первые удачные образцы боевых ракет были созданы в 1818 г. генералом русской артиллерии, участником Отечественной войны 1812 г. А. Д. Засядько. Им же были сконструированы станки для пуска ракет, некоторые из них позволяли вести залповый огонь шестью ракетами.

В середине XIX в. большой вклад в русскую ракетную технику внес генерал К. И. Константинов. Изготовленные под его руководством ракеты с успехом применялись во время Крымской войны 1853—1855 гг. В конструкции ракет было внесено большое количество оригинальных решений.

Теоретические основы движения ракет были заложены в трудах создателя механики тел переменной массы И. В. Мещерского и основоположника теории межпланетных полетов К. Э. Циолковского.

Началом плановых теоретических и экспериментальных исследований в СССР по ракетной технике можно считать работы Газодинамической лаборатории, организованной в 1921 г. в Москве. В 1931—1933 гг. создаются группы по изучению реактивного движения (ГИРД), в которых работали энтузиасты ракетного дела Ф. А. Цандер, С. П. Королев, М. К. Тихомиров. А. А. Победоносцев и др. В начале 30-х годов были созданы первые боевые советские ракеты, с успехом применявшиеся (с некоторой доработкой) в годы Великой Отечественной войны. В настоящее время ракетная техника представляет собой могучую силу, способную решать задачи как тактического, так и стратегического характера.

Внедрение ракетной техники послужило новым мощным толчком в развитии внешней баллистики. Целый комплекс задач, связанный с движением и управлением ракетами, с успехом решен советскими учеными.

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Центр масс снаряда описывает в пространстве траекторию (рис. 2). За начальную точку траектории во внешней баллистике принимают точку вылета, под которой понимают положение центра масс снаряда в момент, когда он теряет механическую связь

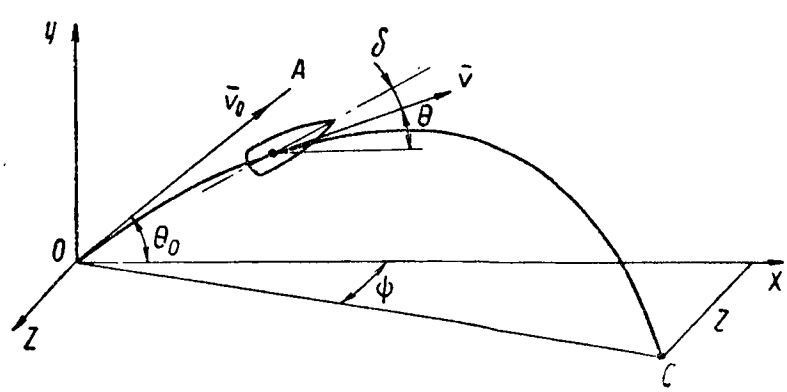


Рис. 2. Траектория движения снаряда постоянной массы

со стволом. В точку вылета помещают начало неподвижной декартовой системы координат $OXYZ$. Горизонтальная плоскость OXZ, проведенная через точку вылета, называется горизонтом орудия, а вертикальная плоскость OYX, проходящая через вектор начальной скорости снаряда, — плоскостью стрельбы. Ось OX называется направлением стрельбы, линия OA, лежащая в плоскости OYX и проходящая через вектор начальной скорости, — линией бросания. Часть траектории от точки вылета O до вершины является восходящей ветвью, часть траектории, лежащая за вершиной, — нисходящей ветвью.

За точку падения C принимают точку пересечения траектории с горизонтом. Величина z отклонения снаряда от плоскости бросания называется деривацией.

В полете ось снаряда не совпадает с вектором скорости, а образует с ним угол нутации δ. Плоскость, проходящую через ось снаряда и вектор скорости, называют плоскостью сопротивления. Двугранный угол, образованный плоскостями сопротивления и бросания, имеющий общей гранью вектор скорости, называют углом прецессии ν (на рисунке не показан).

Глава I

СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СНАРЯД В ПОЛЕТЕ

1.1. СИЛА ТЯЖЕСТИ

Земля — пространственная фигура сложной формы с существенно неравномерным распределением плотности. В геофизических исследованиях форма Земли представляется эллипсоидом вращения с радиусом по экватору $a=6378$ км и с полярным радиусом $b=6356$ км. Средний радиус Земли $R=6371$ км. При дополнительных допущениях относительно распределения плотности с учетом вращения Земли методами теории потенциала получена следующая формула для определения ускорения силы тяжести:

$$g = \frac{fm}{r^2} + I\frac{fma^2}{r^4}(1 - 3\sin^2\psi), \qquad (1.1.1)$$

где

$$I = \varepsilon - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 a^2}{fm}; \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a};$$

m — масса Земли;
f — гравитационная постоянная, $fm=398603{,}2$ км^3/с^2;
ε — сжатие земного эллипсоида, $\varepsilon = 1 : 298{,}2$;
Ω — угловая скорость вращения Земли, $\Omega \approx 7{,}29212 \cdot 10^{-5}$ рад/с;
r — длина радиуса-вектора до рассматриваемой точки;
ψ — географическая широта места (угол между радиусом-вектором и плоскостью экватора).

Если учесть, что радиус-вектор земного эллипсоида может быть выражен с достаточной точностью уравнением

$$\rho = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2\psi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\psi}} \approx a\left(1 - \frac{a^2-b^2}{2a^2}\sin^2\psi\right),$$

то после подстановки числовых значений постоянных получим величину ускорения на поверхности Земли с точностью до малых второго порядка:

$$g_0 = 9{,}78034\,(1 + 0{,}005280 \sin^2 \psi),$$

где 9,78034 м/с^2 — ускорение силы тяжести на экваторе ($g_{оэ}$). Подставляя сюда значение $\psi = 90°$, найдем ускорение на полюсах $g_{оп} = 9{,}83198$ м/с^2. Среднее арифметическое ускорение $g_{ос р} = 9{,}80616$ м/с^2. Отклонение от среднего арифметического $\pm 0{,}25\%$.

При полете снаряда на некоторой высоте (переменной) ускорение силы тяжести меняется как по величине, так и по направлению. С точностью до величин второго порядка малости ускорение g на высоте y определяется через ускорение на Земле g_0 в соответствии с формулой (1.1.1) по выражению

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R + y}\right)^2 . \qquad (1.1.2)$$

Угол между направлением ускорения силы тяжести в точке вылета и направлением полета до дальности x по дуге поверхности Земли имеет величину $\gamma = \frac{x}{R}$. При $x = 50$ км $\gamma = \frac{50}{6371} = 0{,}0078 = 0{,}45°$. Для дальностей примерно 50 км высота траектории получается около 12 км. Разложим уравнение (1.1.2) в бином Ньютона, ограничившись двумя первыми членами:

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R + y}\right)^2 \approx g_0 \left(1 - 2\frac{y}{R}\right) .$$

Подставив $y = 12$ км, найдем

$$g = g_0 \left(1 - 2\frac{12}{6371}\right) = 0{,}9962 g_0,$$

т. е. в пределах дальностей современного ствольного оружия ускорение силы тяжести меняется не более чем на 0,38%.

Несколько большее влияние на траекторию снаряда оказывает кориолисово ускорение

$$j_к = 2v\Omega \sin(\widehat{\vec{v}\vec{\Omega}}).$$

Пусть скорость движения снаряда $v = 1000$ м/с, $\sin(\widehat{\vec{v}\vec{\Omega}}) = 1$, тогда

$$j_к = 2 \cdot 7{,}292 \cdot 10^{-5} \cdot 1000 = 0{,}146 \text{ м/с}^2,$$

что составляет 1,5% от ускорения силы тяжести. Поскольку во внешней баллистике все расчеты требуется вести с четырь-

мя—пятью значащими цифрами, то каждый из перечисленных факторов, влияющих на положение траектории в пространстве, является достаточно существенным, чтобы быть учтенным в конечном расчете. В то же время эти факторы и достаточно малы, чтобы в случае необходимости их можно было учесть в виде поправок, не усложняя основных уравнений движения. В силу сказанного ускорение силы тяжести будем считать неизменным как по величине, так и по направлению. Суммарный учет влияния кривизны и вращения Земли на траекторию снаряда является предметом теории поправок.

Заметим, что действительные дальности стрельбы из автоматического оружия составляют 1000—3000 м, т. е. на порядок меньше рассмотренных выше, соответственно меньше и погрешности вычислений.

1.2. СТРОЕНИЕ АТМОСФЕРЫ

Воздушную оболочку, окружающую Землю, называют атмосферой. Основные физические параметры атмосферы — плотность воздуха, его температура, влажность, барометрическое давление, скорость и направление ветра — существенно влияют на характеристики траектории движения снарядов.

Атмосферу разделяют на пять основных слоев — сфер. Нижний слой — тропосфера — простирается в средних широтах до высот 11000 м, а в экваториальных областях — до 16000 м. Высота тропосферы зависит от времени года, увеличиваясь летом и уменьшаясь зимой. В тропосфере содержится 75% всей массы атмосферы и основная часть водяного пара. В ней формируются все явления погоды. Отличительная черта тропосферы — понижение температуры воздуха с высотой. Однако зимой и летом после ясных холодных ночей могут наблюдаться температурные инверсии, при которых температура по высоте сначала возрастает, а затем начинает убывать. В тропосфере происходят значительные горизонтальные и вертикальные течения воздушных масс — ветры.

Стратосфера простирается в средних широтах на высотах от 11000 до 50000 м. До высот 25000—35000 м она характеризуется постоянством температуры, которая затем начинает возрастать. Между тропосферой и стратосферой имеется переходный слой толщиной от нескольких сотен до 2000 м, называемый тропопаузой. В тропопаузе и слое, примыкающем к ней снизу, горизонтальные ветры достигают наибольшей величины (скорость до 110 м/с).

Выше стратосферы находятся мезосфера (50000—90000 м), термосфера (90000—500000 м) и экзосфера (до 3000000 м). В термосфере температура воздуха достигает 1500 К. Переходные слои носят название соответственно страто-, мезо- и термопаузы.

1.3. ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЗДУХА

Связь между важнейшими характеристиками сухого воздуха определяется уравнением состояния

$$p = g_0 \rho R T, \tag{1.3.1}$$

где p — давление;
ρ — плотность;
R — газовая постоянная;
T — абсолютная температура.

Равновесие слоя воздуха площадью, равной единице, и толщиной dy на высоте y запишется в виде

$$p - (p + dp) - g\rho dy = 0,$$

откуда

$$dp = -g\rho dy.$$

Подставив сюда значение ρ из уравнения (1.3.1), получим (с учетом принятого допущения, что $g_0 = g$)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{RT}. \tag{1.3.2}$$

Интегрирование приведет к так называемой «барометрической формуле»

$$p = p_0 \exp\left(-\int_0^y \frac{dy}{RT}\right), \tag{1.3.3}$$

где p_0 — давление у поверхности Земли.

Исключая из выражений (1.3.1) и (1.3.3) давление, найдем, что

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T_0}{T}\right) \exp\left(-\int_0^y \frac{dy}{RT}\right). \tag{1.3.4}$$

Зависимости (1.3.3) и (1.3.4) позволяют определять изменения давления и плотности с высотой при известном законе изменения температуры.

На температуру влияет множество факторов: конвективный и лучистый теплообмены, конденсация водяных паров, диссоциация молекул и другие, учесть которые в аналитическом расчете полностью при современном состоянии науки не удается.

Если предположить, что в нижних слоях атмосферы на распределение температур влияет только конвективный теплообмен, то можно качественно проследить за характером изменения темпе-

ратуры с высотой. В этом случае процесс расширения более теплых нижних слоев воздуха при их подъеме будет адиабатическим:

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k},$$

где k — показатель адиабаты;

ρ_0 — плотность воздуха у Земли.

Исключая из этого отношения с помощью уравнения (1.3.1) плотность, получим:

$$p^{1-k}T^k = p_0^{1-k}T_0^k,$$

где T_0 — температура воздуха у Земли.

Логарифмическая производная (соответствующее выражение сначала логарифмируют, затем берут дифференциал от обеих частей равенства) запишется в виде

$$(1-k)\frac{dp}{p} + k\frac{dT}{T} = 0.$$

Имея в виду (1.3.2), найдем, что

$$\frac{k}{1-k}dT = \frac{dy}{R},$$

откуда имеем

$$T = T_0 + \alpha y,$$

где $\alpha = -\frac{1}{R}\frac{k-1}{k}$ — градиент температуры.

Для сухого воздуха $k=1{,}4$ и $R=29{,}27$ м/град, и в этом случае градиент

$$\alpha = -\frac{0{,}4}{1{,}4 \cdot 29{,}27} = -0{,}00976 \text{ град/м}.$$

Непосредственные измерения показывают, что изменение температуры с высотой в тропосфере действительно носит линейный (с инверсиями в непосредственной близости от Земли) характер. Однако измеренный температурный градиент значительно меньше вычисленного в предположении об адиабатичности процесса. Это объясняется в основном конденсацией водяных паров, происходящей при подъеме нагретых объемов воздуха в верхние холодные слои тропосферы.

Параметры атмосферы на высоте в существенной степени зависят от погодных условий, времени суток и года, температурных инверсий. При расчете траектории полета снаряда это следовало бы учитывать. Однако такой подход потребовал бы предварительного составления таблиц стрельбы отдельно для каждого сочетания атмосферных условий, что невозможно. Поэтому таблицы стрельбы

составляются для усредненных параметров воздуха у Земли и при некотором условном распределении температуры воздуха с высотой, а измеренные конкретные параметры атмосферы учитывают при установке прицельных приспособлений в виде поправок. Среднестатистическое усреднение физических характеристик воздуха приводит к понятию стандартной атмосферы.

1.4. СТАНДАРТНЫЕ АТМОСФЕРЫ

Стандартная атмосфера — это условное распределение давления по высоте, рассчитанное по барометрической формуле при определенных допущениях о распределении температур. Появление стандартных атмосфер связано с развитием авиации, с необходимостью градуирования авиационных приборов по высоте.

До 1920 г. в России пользовались условной атмосферой, основанной на результатах температурных измерений над Москвой. В 1920 г. была принята международная стандартная атмосфера (МСА), для которой принимался линейный закон изменения температуры до высоты 11 км и постоянная температура для высот выше этой. В 1927 г. в СССР была введена нормальная артиллерийская атмосфера (НАА). Принципиальное отличие ее от МСА заключалось в наличии переходной зоны на высотах от 9,3 до 12 км, в которой температура изменяется по параболе, сопряженной с линейным законом в тропосфере и постоянным ее значением в стратосфере. Сглаживающий участок не оказывает влияния на результаты вычислений траектории в пределах принятой для баллистических расчетов точности. В 1949 г. были опубликованы подробные таблицы стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—49), в 1964 г. вышли таблицы по ГОСТ 4401—64.

В 1973 г. на основании обработки данных метеоракет и метеоспутников была принята новая стандартная атмосфера (СА). Таблицы стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—73) предназначены для приведения результатов расчетов и измерений характеристик летательных аппаратов и двигателей к одинаковым атмосферным условиям, для градуировки приборов и т. д. Таблицы СА-73 целесообразно использовать и для приведения результатов стрельбы к одинаковым атмосферным условиям, а также для расчетов траекторий.

Таблицы СА составлены в предположении шарообразной формы Земли с радиусом $R_0 = 6371210$ м; ускорение свободного падения у поверхности Земли (точнее на уровне моря в отсутствие приливов и отливов) $g_0 = 9{,}80665$ м/с^2. Метеорологические данные на уровне моря следующие: барометрическое давление $p_0 = 10332{,}3$ кгс/м^2 $= 760$ мм рт. ст., плотность $\rho_0 = 1{,}2250$ кг/м^3 $= 0{,}12492$ кг·с^2/м^4, температура $T_0 = 288{,}15$ К $= 15$°С. Скорость звука $a = 340{,}294$ м/с, $R = 29{,}27$ м/град. Ветер отсутствует. Приведенные данные соответствуют среднестатистическим для широты места $\psi = 45°32'40''$.

По ГОСТ 4401—73 барометрическая формула имеет вид

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{G_0}{R_{\text{ун}}}\int_0^{\Phi}\frac{d\Phi}{T}\right),$$

где G_0 — коэффициент, численно равный ускорению силы тяжести у поверхности Земли;

$R_{\text{ун}}$ — универсальная газовая постоянная ($R_{\text{ун}}=g_0R$);

Φ — так называемая геопотенциальная высота.

Введение понятия геопотенциальной высоты связано с необходимостью учитывать изменение ускорения силы тяжести Земли в уравнении равновесия воздушного слоя в отличие от формулы (1.3.1). Связь дифференциала геопотенциальной высоты с дифференциалом геометрической высоты записывается в виде

$$d\Phi = \frac{g}{g_0}\,dy,$$

откуда с учетом выражения (1.1.2) получим

$$\Phi = \frac{yR}{R+y}.$$

В пределах рассматриваемых здесь высот разницей между геопотенциальной и геометрической высотами можно пренебречь. Кроме того, для высот $y>95$ км различают молекулярную $T_{\text{м}}$ и кинетическую T температуры воздуха, между которыми существует такая связь:

$$T_{\text{м}} = \frac{M_0}{M_y}T,$$

где M_0, M_y — молекулярная масса воздуха у Земли и на высоте y соответственно.

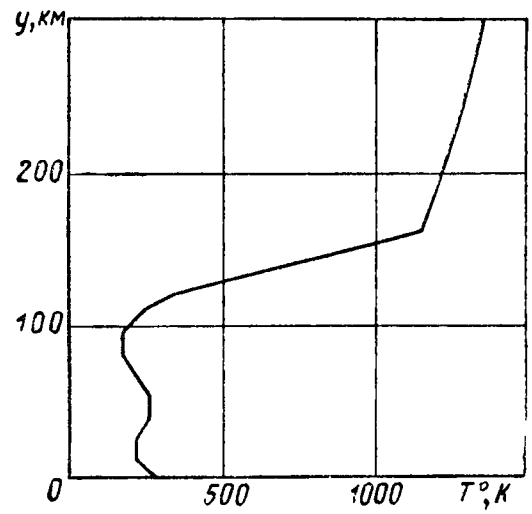


Рис. 3. Изменение температуры воздуха с высотой

Изменение молекулярной температуры $T_{\text{м}}$ в функции геопотенциальной высоты в стандартной атмосфере представляет собой кривую, состоящую из участков с линейным распределением температуры и изотермических (рис. 3). Распределение температуры при этом берется из таблицы параметров стандартной атмосферы (см. приложение 1).

С учетом принятого в стандартной атмосфере распределения температур для участков с линейным распределением имеем:

$$T = T^* + \alpha y, \tag{1.4.1}$$

где T^* — температура, относящаяся к нижней границе слоя.

Из барометрической формулы (1.3.3) получим:

$$\frac{p}{p^*} = \exp\left(-\frac{1}{R}\int_{y^*}^{y}\frac{dy}{T}\right);$$

$$\frac{p}{p^*} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha R}\int_{T^*}^{T}\frac{dT}{T}\right) = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{-\frac{1}{\alpha R}}. \tag{1.4.2}$$

Для плотности согласно уравнению (1.3.4) справедлива запись

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*}\left(\frac{T^*}{T}\right) = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{-\frac{1}{\alpha R}+1}. \tag{1.4.3}$$

Для изотермических слоев ($T = T^* = \text{const}$) найдем

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*} = \exp\frac{y^* - y}{RT}. \tag{1.4.4}$$

Формулы (1.4.1)—(1.4.4) позволяют последовательно вычислить давление и плотность по слоям.

Для нижних слоев атмосферы различие между геопотенциальной и геометрической высотами незначительно, поэтому при расчетах траекторий снарядов ствольных систем целесообразно пользоваться приближенными формулами изменения плотности и давления в функции непосредственно геометрической высоты. Значения начальных параметров в этом случае берутся следующие:

$$T_0 = 288{,}15\ \text{К}; \quad \alpha = -0{,}00650\ \text{град/м}.$$

Подставляя эти данные в зависимости (1.4.1)—(1.4.4.), получим:

для высот до 11000 м

$$\left.\begin{aligned} T &= 288{,}15\ \text{К} - 0{,}00650y; \\ \frac{p}{p_0} &= (1 - 2{,}256\cdot 10^{-5}y)^{-5{,}256}; \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= (1 - 2{,}256\cdot 10^{-5}y)^{-4{,}256}; \end{aligned}\right\} \tag{1.4.5}$$

для высот 11000—25000 м

$$\left.\begin{aligned} T &= 216{,}66\ \text{К};\\ \frac{p}{p_0} &= 0{,}22384 \exp\frac{-(y-11000)}{6342};\\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 0{,}29784 \exp\frac{-(y-11000)}{6342}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.6)$$

1.5. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СНАРЯД В ПОЛЕТЕ

В общем случае ось снаряда не совпадает с вектором скорости по направлению, а отклоняется от него в плоскости сопротивления на угол нутации δ. Плоскость сопротивления составляет с плоскостью бросания двугранный угол ν с вершиной по вектору скорости. Равнодействующая аэродинамических сил R также не совпадает с касательной к траектории и, вообще говоря, не лежит в плоскости сопротивления.

Современная гидромеханика позволяет с довольно большой точностью определить равнодействующую сил сопротивления воздуха для тел простейшей формы (здесь и далее будем считать снаряд телом вращения) в случае обтекания стационарным потоком. Однако существует большое количество факторов, действующих на снаряд в полете, учесть которые при теоретическом расчете на современном этапе развития науки невозможно. К таким факторам относятся нестационарность потока, обтекающего снаряд, сложные пространственные формы отдельных частей снаряда, например, пояска после вылета снаряда из канала ствола орудия, и др. В этих условиях теоретический расчет служит только для выяснения качественной стороны, для определения оптимальных теоретических форм снаряда, обеспечивающих минимальное сопротивление воздуха. Наиболее надежную количественную оценку силы сопротивления дает эксперимент. Чтобы количество опытов было минимальным, необходимо предварительно получить формулу, качественно описывающую процесс. По этой формуле подлежащая опытному определению функция должна зависеть от минимального числа безразмерных параметров. Получить такую формулу можно с помощью теории размерностей.

Теоретическое и экспериментальное изучение процесса обтекания тела сверхзвуковым потоком при отсутствии угла атаки показывает, что общее сопротивление движению потока складывается из волнового сопротивления, сопротивления поверхностного трения и донного сопротивления (табл. 1).

Таблица 1

Примерные значения видов сопротивления, %

Виды сопротивления	Дозвуковые скорости, $M=0{,}2 \div 0{,}8$	Сверхзвуковые скорости	
		$M=1{,}2 \div 1{,}7$	$M=1{,}7 \div 2{,}5$
Волновое	0	50—60	60—70
Донное	70—60	35—30	30—22
Поверхностное трение	30—40	15—10	10—8

Перед головной частью снаряда образуется коническая ударная волна (конус Маха), на фронте которой скачком меняется давление и скорость набегающего потока. Избыточное давление на головную часть снаряда составляет основную долю сопротивления. На величину этого давления влияют скорость движения снаряда и его калибр.

Сопротивление поверхностного трения зависит от скорости относительного движения потока, размеров поверхности снаряда, т. е. его калибра и длины, и вязкости воздуха.

За дном снаряда образуется зона вихревого движения воздуха с пониженным давлением, что также увеличивает разность давлений на головную и донную части снаряда, создавая донное сопротивление.

Помимо основного движения снаряда — движения центра масс — снаряд совершает еще некоторое движение около центра масс, параметры которого также оказывают влияние на аэродинамические силы. При отклонении снаряда на угол δ (рис. 4) в плоскости сопротивления возникает подъемная сила R_N, величина которой зависит от угла δ, калибра и длины снаряда. Одновременно увеличивается и сила лобового сопротивления R_T. Равнодействующая сил сопротивления $\bar{R}$ в общем случае не проходит через центр масс (ЦМ) снаряда, а приложена в центре давления (ЦД). Возникает опрокидывающий (стабилизирующий для опереных снарядов) образованный парой сил $\bar{R}$ и $\bar{R}''$ момент M.

Угол δ меняется в плоскости сопротивления со скоростью $\dot{\delta}$, а сама плоскость сопротивления вращается со скоростью прецессии $\dot{\nu}$, при этом возникают аэродинамические силы, препятствующие этим двум движениям. Можно полагать, что помимо размеров снаряда они зависят от угловой скорости вращения его относительно экваториальной оси

$$\omega = f(\dot{\delta}, \dot{\nu}, \dot{\delta}).$$

Соответствующий момент $M_д$ называется демпфирующим.

Вращение снаряда относительно продольной оси со скоростью $\dot{\varphi}$ также создает момент поверхностного трения $M_г$.

Поскольку в общем случае ось снаряда не совпадает с вектором скорости по направлению, то имеется поперечная составляющая скорости потока, которая, складываясь со скоростью циркулирующего потока, создает с одной стороны снаряда область повышенного давления (при сложении векторов скоростей, направленных в разные стороны), с другой — пониженного. В результате возникает сила Магнуса $R_{ма}$ (рис. 5).

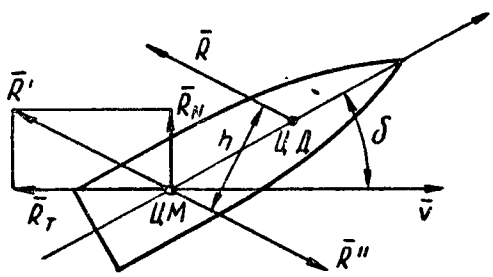


Рис. 4. Аэродинамические силы, действующие на снаряд

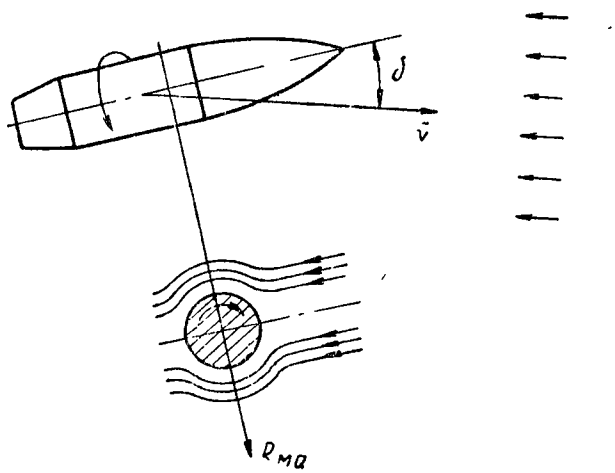


Рис. 5. Схема возникновения силы Магнуса

На величину аэродинамических сил оказывают влияние и параметры атмосферы — ее плотность ρ и температура T, которая может быть выражена через скорость звука ($a = \sqrt{kgRT}$).

Таким образом, на аэродинамические силы влияют следующие факторы: калибр снаряда d; характерный размер (длина l или некоторый другой линейный параметр, связанный с размерами снаряда, например, плечо опрокидывающего момента h); скорость движения центра масс v; скорость вращения вокруг полярной оси $\dot{\varphi}$; скорость вращения относительно экваториальной оси ω; угол нутации δ; плотность воздуха ρ; вязкость воздуха μ; скорость звука a.

Общие выражения для равнодействующих сил и моментов имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} R &= f_1(d,\ l,\ v,\ \dot{\varphi},\ \omega,\ \delta,\ \rho,\ \mu,\ a); \\ M &= f_2(d,\ l,\ v,\ \dot{\varphi},\ \omega,\ \delta,\ \rho,\ \mu,\ a). \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.1)$$

Уменьшим единицы измерения массы, длины и времени соответственно в m, λ и τ раз. Численные значения величин в новых

единицах измерения увеличатся при этом согласно их размерностям. Получим:

$$R' = R\frac{m\lambda}{\tau^2};\quad d' = d\lambda;\quad l' = l\lambda;\quad v' = v\frac{\lambda}{\tau};\quad \dot{\varphi}' = \dot{\varphi}\frac{1}{\tau};$$

$$\omega' = \omega\frac{1}{\tau};\quad \delta' = \delta;\quad \rho' = \rho\frac{m}{\lambda^3};\quad \mu' = \mu\frac{m}{\lambda\tau};\quad a' = a\frac{\lambda}{\tau}.$$

Подставив эти значения в выражения (1.5.1), найдем:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{m\lambda}{\tau^2} &= f_1\left(d\lambda;\ l\lambda;\ v\frac{\lambda}{\tau};\ \frac{\dot{\varphi}}{\tau};\ \frac{\omega}{\tau};\ \delta;\ \rho\frac{m}{\lambda^3};\ \mu\frac{m}{\lambda\tau};\ a\frac{\lambda}{\tau}\right);\\ M\frac{m\lambda^2}{\tau^2} &= f_2\left(d\lambda;\ l\lambda;\ v\frac{\lambda}{\tau};\ \frac{\dot{\varphi}}{\tau};\ \frac{\omega}{\tau};\ \delta;\ \rho\frac{m}{\lambda^3};\ \mu\frac{m}{\lambda\tau};\ a\frac{\lambda}{\tau}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.5.2}$$

Выберем числа m, λ, τ так, чтобы выполнялись равенства:

$$d\lambda = 1;\quad v\frac{\lambda}{\tau} = 1;\quad \rho\frac{m}{\lambda^3} = 1.$$

Это возможно, если $\lambda = \frac{1}{d}$; $\tau = \frac{v}{d}$; $m = \frac{1}{\rho d^3}$.

Подставляя эти значения в уравнения (1.5.2), получим:

$$R\frac{1}{\rho v^2 d^2} = f_1\left(1;\ 1;\ 1;\ \frac{l}{d};\ \frac{\dot{\varphi}d}{v};\ \frac{\omega d}{v};\ \delta;\ \frac{\mu}{\rho v d};\ \frac{a}{v}\right);$$

$$M\frac{1}{\rho v^2 d^3} = f_2\left(1;\ 1;\ 1;\ \frac{l}{d};\ \frac{\dot{\varphi}d}{v};\ \frac{\omega d}{v};\ \delta;\ \frac{\mu}{\rho v d};\ \frac{a}{v}\right).$$

Поскольку вписывать постоянные под знак функции не имеет смысла, а функция какого-либо параметра $\left(\text{например, } \frac{a}{v}\right)$ является функцией и обратного параметра $\left(\frac{v}{a}\right)$, представим последние равенства в виде:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\rho v^2}{2}d^2\varphi_1\left(\frac{v}{a};\ \mathrm{Re};\ \frac{l}{d};\ \frac{\dot{\varphi}d}{v};\ \frac{\omega d}{v};\ \delta\right);\\ M &= \frac{\rho v^2}{2}d^2 l\varphi_2\left(\frac{v}{a};\ \mathrm{Re};\ \frac{l}{d};\ \frac{\dot{\varphi}d}{v};\ \frac{\omega d}{v};\ \delta\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.5.3}$$

где $\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}$ — число Рейнольдса.

Величина $\frac{\rho v^2}{2}$ называется скоростным напором. Она равна кинетической энергии набегающего потока, отнесенной к единице объема. Формулы (1.5.3) являются общими для аэродинамических сил и моментов. Число переменных факторов под знаками неизвестных функций еще достаточно велико, но при изучении каждой отдельной составляющей сил и моментов оно может быть уменьшено.

1.6. СИЛА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ ФОРМЫ СНАРЯДА

Можно с уверенностью предположить, что скорости вращательного движения снаряда мало сказываются на величине силы лобового сопротивления и их влиянием можно пренебречь. Тогда выражение для силы лобового сопротивления запишется в виде

$$R_т = S\frac{\rho v^2}{2} c_x \left(\frac{v}{a};\ \mathrm{Re};\ \frac{l}{d};\ \delta\right),$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения снаряда;

c_x — функция лобового сопротивления.

Эксперименты показывают, что величина c_x сильно зависит от формы обтекаемого тела и должна быть определена для каждой конкретной формы. Но для тел, близких по форме к современным пулям и снарядам, в довольно широком диапазоне скоростей можно найти достаточно постоянный коэффициент пропорциональности. Это позволяет для класса наиболее характерных снарядов определить эталонную функцию лобового сопротивления $c_{x\,эт}$. В этом случае функцию лобового сопротивления для данного типа снарядов можно выразить через эталонную функцию:

$$c_x \left(\frac{v}{a};\ \mathrm{Re};\ \delta\right) = i c_{x\,эт} \left(\frac{v}{a};\ \mathrm{Re};\ \delta\right), \qquad (1.6.1)$$

где i — коэффициент формы снаряда, определяемый некоторым средним значением для данного диапазона скоростей.

Параметр $\frac{l}{d}$ в этой формуле отсутствует, так как он также характеризует форму снаряда. Введение коэффициента формы позволяет произвести дальнейшие упрощения в записи функции сопротивления. Как показывают эксперименты, величина и характер этой функции слабо зависят от калибра снаряда, состояния его поверхности (шероховатости) и, следовательно, от числа Рейнольдса. Кроме того, поскольку функция сопротивления определяется стрельбами, т. е. при вполне определенном среднем зна-

чении угла нутации $\delta_{ср}$, то можно считать значения углов нутации в правой и левой частях равенства (1.6.1) одинаковыми, а имеющееся различие учесть с помощью коэффициента формы. Таким образом, можно написать

$$c_x\left(\frac{v}{a}\right) = ic_{x\,эт}\left(\frac{v}{a}\right).$$

Коэффициент формы в этом случае выступает еще и как функция калибра и среднего угла нутации. Как диапазон скоростей, так и средний угол нутации могут меняться от выстрела к выстрелу в зависимости от начальных параметров траектории. Должен меняться вместе с ним и коэффициент формы. Принимая постоянным его среднее значение на основании стрельб при определенных угле бросания и начальной скорости, мы тем самым вносим ошибки во все остальные траектории с другими начальными параметрами. Эти ошибки будут тем больше, чем в большей степени форма снаряда, его калибр и характер движения около центра масс отличаются от соответствующих характеристик эталонных снарядов, т. е. чем больше коэффициент формы отличается от единицы. В настоящее время можно встретить таблицы функции $c_x\left(\frac{v}{a}\right)$ к законам Сиаччи, 1930 г. и 1943 г. (см. приложение II), причем последний наиболее приемлем для вычисления траекторий пуль и снарядов современной обтекаемой формы. Для оперенных снарядов и ракет определен закон 1958 г.

Итак, коэффициент формы снаряда как коэффициент согласования с опытом является функцией аэродинамической формы снаряда, калибра орудия, состояния поверхности (шероховатости) снаряда и характера движения его около центра масс.

При некоторых условиях стрельбы углы нутации могут достигать довольно больших значений и в этом случае приходится учитывать влияние их на величину функции сопротивления. Разложим значение функции $c_x\left(\frac{v}{a},\ \delta\right)$ в ряд Тейлора. Поскольку c_x не должна менять своего знака при изменении знака δ, то в разложении должны участвовать только члены с четными степенями параметра. После разложения и нескольких преобразований получим

$$c_x\left(\frac{v}{a};\ \delta\right) = c_{x0}\left(\frac{v}{a}\right)(1 + \alpha_1\delta^2 + \ldots), \qquad (1.6.2)$$

где c_{x0} — значение функции лобового сопротивления при $\delta = 0$;
α_i — коэффициенты разложения.

В ряде (1.6.2) достаточно ограничиться двумя первыми членами. Коэффициент α_1 определяется экспериментально, его значение находится в пределах 10—20. Для 7,62-мм винтовочной пули $\alpha_1 = 13$. Таким образом, при $\delta = 0{,}1$ рад (5,7°) сила лобового сопротивления движению пули возрастает на 13% по сравнению с полетом при нулевом угле нутации.

1.7. УСКОРЕНИЕ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА. БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ СНАРЯДА

Определим ускорение, вызываемое силой лобового сопротивления,

$$j = \frac{g}{q} R_т = Si \frac{g\rho v^2}{2q} c_x\left(\frac{v}{a}\right).$$

Перепишем эту формулу в виде

$$j = \frac{\pi d^2}{4q} i \frac{\rho}{\rho_0} v^2 \frac{g\rho_0}{2} c_x\left(\frac{v}{a}\right).$$

Обозначив $\Delta(y) = \frac{\rho}{\rho_0}$, получим

$$j = \frac{id^2}{q} 1000\Delta(y) v^2 \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} \frac{\pi g \rho_{oc}}{8000} c_x\left(\frac{v}{a}\right),$$

где ρ_{oc} — плотность воздуха у Земли согласно параметров стандартной атмосферы.

По ГОСТ 4401—73 величина $g\rho_{oc} = 1{,}225$ кг/м^3, тогда

$$j = c\Delta(y)\frac{\rho_0}{\rho_{oc}} v^2 K_т\left(\frac{v}{a}\right), \qquad (1.7.1)$$

где c — баллистический коэффициент снаряда,

$$c = \frac{id^2}{q} 1000;$$

$$K_т\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{\pi g \rho_{oc}}{8000} c_x\left(\frac{v}{a}\right) = 4{,}8104 \cdot 10^{-4} c_x\left(\frac{v}{a}\right).$$

Поскольку наиболее употребительна функция $c_x\left(\frac{v}{a}\right)$, зависимость (1.7.1) можно представить в виде

$$j = c_1 \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} \Delta(y) v^2 c_x\left(\frac{v}{a}\right), \qquad (1.7.2)$$

где $c_1 = 4{,}8104 \cdot 10^{-4}$ с.

Анализируя формулу (1.7.1), замечаем, что все параметры снаряда — масса, калибр и особенности формы — объединены в баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} 1000, \qquad (1.7.3)$$

который является важнейшей характеристикой снаряда. Два снаряда с равными баллистическими коэффициентами испытывают

одинаковые ускорения земного тяготения и силы лобового сопротивления. Следовательно, при прочих равных условиях траектории таких снарядов будут одинаковыми.

Отрицательное ускорение силы сопротивления тем больше, чем значительнее баллистический коэффициент, следовательно, снаряд с бóльшим значением c будет иметь меньшую дальность полета.

Помимо коэффициента формы i баллистический коэффициент зависит еще от «поперечной нагрузки» $\frac{q}{d^2}$ (точнее, от $\frac{q}{s} = \frac{4q}{\pi d^2}$).

Чем больше эта нагрузка, тем меньше баллистический коэффициент, тем выгоднее снаряд в баллистическом отношении. Увеличить поперечную нагрузку можно, например, за счет увеличения длины снаряда без изменения калибра. Однако длина снарядов, стабилизированных вращением, ограничена возможностью обеспечить устойчивость движения около центра масс. Для вращающихся снарядов $l = (4{,}0 \div 5{,}5)d$. Значительно большую длину можно назначить для оперенных снарядов.

Определим зависимость баллистического коэффициента от калибра орудия. Масса снаряда связана с калибром по формуле

$$q = 1000 C_q d^3, \tag{1.7.4}$$

где C_q — коэффициент массы.

Для калиберных снарядов $C_q = 10 \div 20$, т. е. коэффициент массы меняется в довольно узких пределах. Из выражений (1.7.4) и (1.7.3) найдем

$$c = \frac{i}{C_q d},$$

т. е. с увеличением калибра баллистический коэффициент уменьшается. В диапазоне изменения диаметров пуль и снарядов $d = (5{,}45 \div 400)$ мм и $i_{43} = 0{,}8 \div 1{,}5$ баллистический коэффициент меняется в пределах $c = 0{,}15 \div 10$.

1.8. ОБЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ И МОМЕНТОВ

На основании изложенного в параграфах 1.5—1.7 для силы лобового сопротивления можно записать:

$$R_т = \frac{id^2}{g} 1000 \Delta(y) v^2 K_т \left(\frac{v}{a}\right)(1 + \alpha_1 \delta^2) \frac{\rho_0}{\rho_{oc}}. \tag{1.8.1}$$

Аналогичный вид имеют и выражения для остальных сил и моментов.

Можно предположить, что величина нормальной составляющей силы сопротивления воздуха R_N также слабо зависит от угловых скоростей вращательного движения и числа Re. Тогда

$$R_N = \frac{\rho v^2}{2} d^2 \varphi_N \left(\frac{v}{a}; \quad \frac{l}{d}; \delta \right).$$

Из физических соображений следует, что сила R_N находится в прямой зависимости от параметра $\frac{l}{d}$. Преобразуя это выражение так же, как и в случае лобового сопротивления, получим

$$R_N = \frac{dl}{g} 1000\Delta(y) \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} v^2 K_N \left(\frac{v}{a}; \delta \right).$$

В отличие от силы лобового сопротивления, величина R_N зависит не от площади поперечного сечения, а от площади осевого сечения, характеризуемого произведением dl.

Для сверхзвуковых скоростей функцию двух переменных с достаточной степенью точности можно заменить произведением двух функций:

$$K_N \left(\frac{v}{a}; \delta \right) = K_N \left(\frac{v}{a} \right) f_N(\delta).$$

При разложении функции $f_N(\delta)$ по степеням δ около значения угла $\delta = 0$ следует учитывать, что при изменении знака угла δ знак силы R_N меняется на обратный. Это значит, что в разложении необходимо удерживать только члены с нечетными степенями δ.

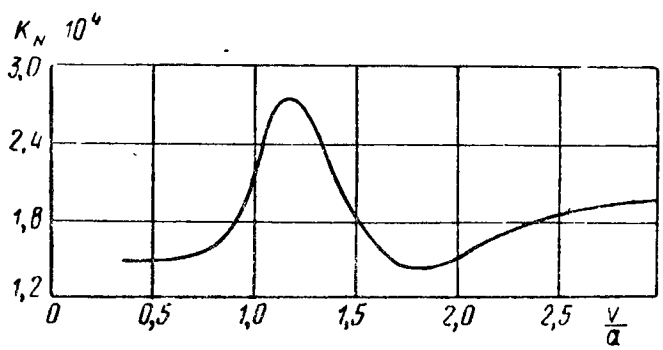


Рис. 6. Экспериментальная зависимость $K_N\left(\frac{v}{a}\right)$ для винтовочной пули при малых углах нутации

Ограничиваясь двумя членами ряда, запишем:

$$R_N = \frac{dl}{g} 1000\Delta(y) \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} v^2 K_N \left(\frac{v}{a} \right) \delta(1 + \alpha_2 \delta^2), \qquad (1.8.2)$$

где $K_N\left(\frac{v}{a}\right)$ — функция нормальной силы (рис. 6);

α_2 — опытный коэффициент, определяемый по результатам стрельб при больших углах нутации. Для винтовочной пули $\alpha_2 \approx -0{,}35$.

Значение силы Магнуса зависит прежде всего от скорости вращения снаряда относительно полярной оси и угла нутации. Поскольку происхождение этой силы связано с циркулирующим потоком, вызванным трением корпуса вращающегося снаряда о воздух, сила Магнуса связана с числом Рейнольдса. Однако при больших числах Рейнольдса, которые характерны для движения снаряда в воздухе, силы трения слабо меняются в случае изменения величины Re, поэтому данные, полученные при одних скоростях, можно переносить на другие в довольно большом диапазоне. Таким образом, справедлива запись:

$$R_{\text{ма}} = \frac{\rho v^2}{2} d^2 \varphi_{\text{ма}} \left(\frac{v}{a} ; \quad \frac{l}{d} ; \quad \frac{\dot{\varphi} d}{v} ; \ \delta \right).$$

Если еще предположить прямую пропорциональность силы Магнуса от трех последних безразмерных параметров, то окончательно получим

$$R_{\text{ма}} = \frac{d^2 l}{g} 1000 \Delta (y) \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ос}}} v \dot{\varphi} K_{\text{ма}} \left(\frac{v}{a} \right) \delta.$$

Коэффициент $K_{\text{ма}}$ определен только при малых скоростях и равен $1{,}4 \cdot 10^{-2}$.

Можно также предположить, что опрокидывающий момент зависит от параметров $\frac{v}{a}$, $\frac{l}{d}$, δ, причем от второго — прямо пропорционально. Зависимость от угла нутации представим произведением на некоторую функцию $f_{\text{м}}(\delta)$.

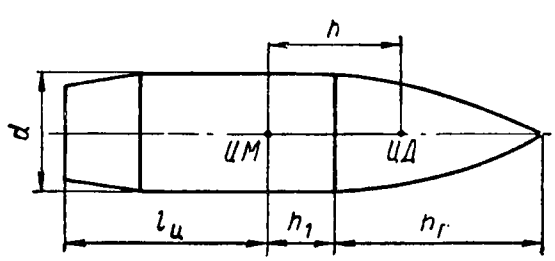


Рис. 7. Характерные размеры снаряда, используемые для вычисления плеча опрокидывающего момента h

Во внешней баллистике вместо полной длины снаряда l вводится плечо аэродинамической силы h, что вызвано стремлением получить одинаковые значения функции опрокидывающего момента $K_{\text{м}} \left(\frac{v}{a} \right)$ при различных формах снаряда и одной и той же скорости.

Выражение для момента имеет вид

$$M = \frac{d^2 h}{g} 1000 \Delta (y) \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ос}}} v^2 K_{\text{м}} \left(\frac{v}{a} \right) f_{\text{м}}(\delta), \qquad (1.8.3)$$

где $K_м\left(\frac{v}{a}\right)$, $f_м(\delta)$ — функции, подлежащие опытному определению.

Плечо аэродинамической силы для вращающихся снарядов находим по эмпирическим формулам:

$$\left.\begin{aligned} h &= h_1 + \frac{1}{3} h_г; \\ h &= h_1 + 0{,}57 h_г - 0{,}16 d; \\ h &= \frac{V - f_д l_ц}{d^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.8.4)$$

где h_1 — расстояние от центра масс (ЦМ) до начала оживальной части (рис. 7);
$h_г$ — длина оживальной части;
V — объем тела;
$l_ц$ — расстояние от дна до центра масс;
$f_д$ — площадь дна;
d — калибр.

Первая формула имеет самый простой вид, последняя — наиболее полно отражает параметры снаряда и лучше согласует данные эксперимента для разных видов снарядов. Таблицы значений функции $K_м\left(\frac{v}{a}\right)$ составляются для вполне определенного способа подсчета плеча h, что должно быть оговорено (табл. 2).

Таблица 2

Значения $K_м$ в зависимости от скорости при использовании формулы $h = \frac{V - f_д l_ц}{d^2}$

v, м/с	$K_м\,10^3$	v, м/с	$K_м\,10^3$	v, м/с	$K_м\,10^3$	v, м/с	$K_м\,10^3$
275	1,17	375	1,32	600	1,06	1000	0,84
300	1,34	400	1,28	700	0,98	1100	0,82
325	1,37	450	1,21	800	0,92	1200	0,81
350	1,36	500	1,16	900	0,87	1300	0,80

Величина h не является постоянной, а зависит от скорости движения снаряда и угла нутации. Влияние скорости учитывается в значении функции $K_м\left(\frac{v}{a}\right)$, а влияние угла нутации — через функцию $f_м(\delta)$, вид которой пока не изучен. В исследованиях чаще

всего берут линейную зависимость опрокидывающего момента от угла δ или выбирают вид функции $f_м(\delta)$ так, чтобы уравнения движения снаряда около центра масс сводились к интегрируемым в аналитическом виде. Например:

$$f_м(\delta) = \sin\delta; \quad f_м(\delta) = \sin\delta\cos\delta;$$

$$f_м(\delta) = \sin\delta[1 - b(1 - \cos\delta)],$$

где $b = 1{,}6$ (для винтовочной пули).

Демпфирующий момент зависит от угловой скорости поворота снаряда и его длины. Предполагая прямую пропорциональную зависимость от соответствующих факторов, получим

$$M_D = -\frac{dl^3}{g} 1000\Delta(y)\frac{\rho_0}{\rho_{oc}} vK_D\left(\frac{v}{a}\right)\omega.$$

Ориентировочно $K_D = (0{,}60 \div 0{,}85)\,10^{-4}$.

Момент поверхностного трения зависит в основном от длины снаряда и угловой скорости вращения относительно полярной оси:

$$M_г = -\frac{d^3l}{g} 1000\Delta(y)\frac{\rho_0}{\rho_{oc}} vK_г\left(\frac{v}{a}\right)\dot{\varphi}.$$

Для оценки влияния этого момента на движение снаряда можно принять $K_г = 2\cdot 10^{-6}$. Момент поверхностного трения мал по сравнению с демпфирующим моментом и оба они малы по сравнению с опрокидывающим моментом, который для вращающихся снарядов является основным аэродинамическим моментом. Для оперенных снарядов демпфирующий момент M_D имеет большее значение и может оказать существенное влияние на движение снаряда около центра масс.

1.9. РЕАКТИВНЫЕ СИЛА И МОМЕНТ

Если в момент времени t масса ракеты имеет величину m, а ее скорость v, то к моменту $t+dt$ масса будет $m—dm$, а скорость $v+dv$, причем масса dm приобретает скорость $v—u$, где u — скорость истечения газов из сопла. Приращение количества движения за промежуток времени dt равно импульсу суммы аэродинамических и аэростатических сил ΣR, действующих на снаряд:

$$(m - dm)(v + dv) + dm(v - u) - mv = (\Sigma R)\,dt.$$

Пренебрегая малыми второго порядка и разделив обе части равенства на dt, получим

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}u + \Sigma R. \qquad (1.9.1)$$

Это уравнение было впервые опубликовано в 1897 г. русским ученым И. В. Мещерским. Член $\frac{dm}{dt}u$ представляет собой реактивную силу. Для современных пороховых ракетных двигателей $u = 1700 \div 1900$ м/с. Поскольку сила тяжести и аэродинамические силы действуют на ракету так же, как и на снаряд постоянной массы, из сил, входящих под знак суммы в уравнении (1.9.1), выделим силы, обусловленные разностью атмосферного давления p_a и давления на срезе сопла p_c (рис. 8). Тогда соотношение (1.9.1) примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}u + s_c(p_c - p_a) + \Sigma R_{ад},$$

где s_c — площадь выходного сечения сопла;
$\Sigma R_{ад}$ — сумма аэродинамических сил.

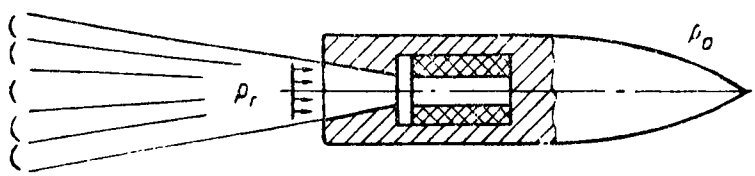


Рис. 8. Схема реактивного снаряда

Величину силы, называемой стендовой тягой двигателя, найдем по формуле

$$P = \dot{m}u + s_c(p_c - p_a) = \dot{m}u_e, \qquad (1.9.2)$$

где u_e — эффективная скорость истечения,

$$u_e = u + \frac{s_c(p_c - p_a)}{\dot{m}}.$$

Для современных пороховых снарядов $u_e = 1800 \div 2100$ м/с при давлении $p_c = 2 \div 7$ атм. Поскольку наружное давление p_a меняется с высотой, то величины u_e и P также зависят от высоты. Однако эта зависимость значительно слабее, чем для аэродинамических сил, и мы будем ею пренебрегать.

Реактивные снаряды, так же как и снаряды постоянной массы, могут стабилизироваться вращением. С этой целью ракета снабжается n наклонными соплами, расположенными по окружности диаметром d_c (рис. 9). В этом случае реактивная сила

$$P = nP_\gamma \cos\gamma,$$

а реактивный вращающий момент

$$M_{\text{р}} = \frac{nP_{\gamma}d_{\text{с}}\sin\gamma}{2}. \qquad (1.9.3)$$

При решении задачи внешней баллистики значения P и $M_{\text{р}}$ можно считать постоянными.

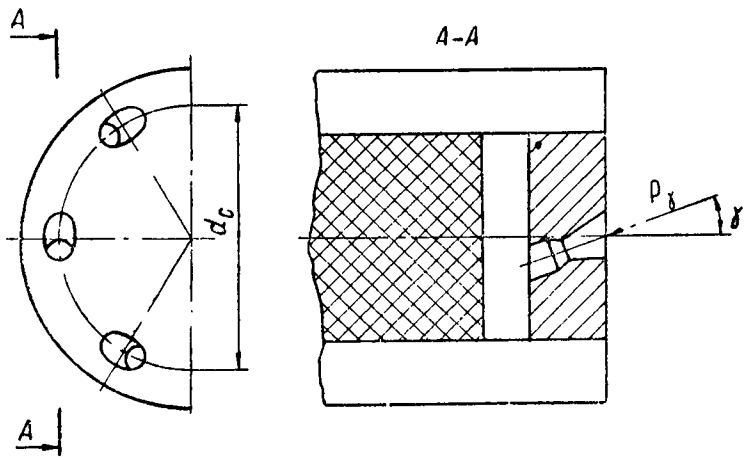


Рис. 9. Расположение наклонных сопел реактивного снаряда

Кроме того, вследствие движения струи вдоль корпуса, колеблющегося относительно продольной оси, на снаряд оказывает демпфирующее воздействие момент кориолисова ускорения. Однако в плотных слоях атмосферы его величина мала по сравнению с аэродинамическим демпфирующим моментом и мы будем им пренебрегать.

Большое влияние на полет снаряда оказывает момент от эксцентриситета силы тяги — величины случайной. Этот момент вызывает рассеивание снарядов.

1.10. УСКОРЕНИЕ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ

Запишем ускорение силы тяги с учетом формулы (1.9.2) в виде

$$j_p = \frac{P}{m(t)} = \frac{\dot{m}}{m(t)}u_e. \qquad (1.10.1)$$

Переменная масса снаряда имеет значение

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t,$$

где m_0 — начальная масса снаряда;

$\dot{m}$ — секундный расход массы.

Если полное время горения заряда τ, то масса снаряда в конце горения

$$m_к = m_0 - \dot{m}\tau = m_0 - \omega,$$

где ω — масса пороховой шашки.

Преобразуем выражение для массы снаряда:

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t = m_0\left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0}\,t\right).$$

Введем новую переменную $\mu = \frac{\dot{m}}{m_0}\,t$, тогда

$$m(t) = m_0(1 - \mu).$$

При $\dot{m} = \text{const}$ должно быть $\dot{m} = \frac{\omega}{\tau}$, поэтому

$$\mu = \frac{\omega t}{m_0 \tau}.$$

Отношение $\frac{\omega}{m_0}$ — важная характеристика для проектирования реактивных снарядов. С его ростом увеличивается скорость движения снаряда и дальность его полета, однако снижается относительная масса боевой части.

С учетом принятых обозначений формула (1.10.1) примет вид

$$j_p = \frac{\omega u_e}{m_0 \tau (1 - \mu)}. \qquad (1.10.2)$$

Отсюда следует, что ускорение силы тяги повышается с увеличением относительной массы заряда и эффективной скорости истечения.

В выражении (1.7.3) для баллистического коэффициента масса реактивного снаряда будет переменной. С учетом ранее принятых обозначений можем записать

$$c = \frac{id^2}{q_0(1 - \mu)}\,1000 = \frac{c_0}{1 - \mu}.$$

Кроме того, следует учитывать, что истекающие из сопла газы не позволяют образоваться вакууму за донным срезом снаряда и потому для реактивного снаряда донное сопротивление практически отсутствует. Это обстоятельство можно учесть соответствующим изменением коэффициента формы.

1.11. ПОЛНЫЙ ИМПУЛЬС РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ И ЕДИНИЧНЫЙ ИМПУЛЬС ДВИГАТЕЛЯ

Полным импульсом реактивной силы называют интегральную характеристику кривой тяги двигателя P по времени:

$$I = \int_0^{\tau} P dt,$$

где τ — время работы ракетного двигателя.

Если тяга двигателя примерно постоянная в течение всего времени его работы, то

$$I = P\tau. \tag{1.11.1}$$

Величина полного импульса комплексно характеризует эффективность работы порохового ракетного двигателя с учетом уровня развиваемой им тяги и времени действия ее на снаряд.

Важнейшей характеристикой порохового ракетного двигателя принято считать величину, показывающую, какой импульс сообщается ракете при сгорании в двигателе 1 кг пороха. Эта величина называется единичным импульсом

$$j_1 = \frac{I}{\omega}.$$

Выражая массу ω через секундный расход и полное время работы двигателя ($\omega = \dot{m}\tau$) и учитывая соотношение (1.11.1), получим

$$j_1 = \frac{P\tau}{\dot{m}\tau} = \frac{P}{\dot{m}}. \tag{1.11.2}$$

Далее, с учетом формул (1.10.1) и (1.10.2) имеем

$$P = j_p m_0 (1 - \mu) = \frac{\omega u_e m_0 (1 - \mu)}{m_0 \tau (1 - \mu)} = \frac{\omega u_e}{\tau}.$$

Подставляя это значение в уравнение (1.11.2), окончательно получим

$$j_1 = u_e$$

Единичный импульс следует считать основным критерием оценки эффективности ракетного топлива. Поскольку в заданиях чаще всего указывается именно этот импульс, то выразим через него ускорение силы тяги

$$j_p = \frac{\omega j_1}{m_0 \tau (1 - \mu)}.$$

Глава II

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

2.1. ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Наряду с неподвижной системой координат (см. рис. 2) имеются системы подвижных координат, позволяющие записать уравнения движения в наиболее компактном виде.

Рассмотрим так называемую скоростную систему координат, в которой одна из осей всегда совпадает с вектором скорости центра масс снаряда (рис. 10). Для ее построения повернем исходную систему $OXYZ$ относительно оси Y на угол ψ, при этом ось OX займет промежуточное положение OX', а ось OZ — окончательное положение OZ_1. Повернем затем промежуточную систему $OX'YZ_1$ относительно оси OZ_1 на угол θ, тогда оси OX' и OY займут свои окончательные положения OX_1 и OY_1, при этом ось OX_1 совпадет по направлению с вектором скорости $\bar{v}$.

Помимо скоростной системы рассмотрим еще так называемую полусвязанную систему координат, одна из осей которой жестко связана с продольной осью снаряда. (Существует еще связанная система координат, в которой все оси жестко связаны с рассматриваемым телом.) Для построения этой системы повернем исходную систему координат $OXYZ$ относительно оси OY на угол ψ. Две другие оси при этом займут промежуточные положения OX' и OZ' (рис. 11). Повернем систему $OX'YZ'$ относительно оси OZ' на угол $\theta+\delta_z$, тогда ось OX' займет второе промежуточное положение OX''. Наконец, повернем систему $OX''Y_1Z'$ на угол δ_y относительно оси OY_1. Оси OX'' и OZ' займут окончательные положения OX_1 и OZ_1, причем ось OX_1 совпадет с продольной осью снаряда. Заметим, что между углом нутации и углами δ_y и δ_z существует зависимость $\cos\delta=\cos\delta_y\cos\delta_z$ или для малых углов $\delta^2=\delta_y^2+\delta_z^2$. Эта система координат предложена акад. А. Н. Крыловым.

В некоторых случаях для описания движения снаряда около центра масс удобно воспользоваться системой координат Эйлера $O\xi\eta\zeta$ (рис. 12). Плоскость сопротивления $O\xi\eta$ проходит через вектор скорости $\bar{v}$ и ось снаряда $O\xi$ и образует с плоскостью OXY двугранный угол прецессии ν с ребром по вектору скорости. Угол нутации δ между вектором скорости и осью снаряда лежит в плоскости сопротивления. При заданном угле θ угол нутации δ и угол прецессии ν совместно с углом вращения снаряда относительно полярной оси φ полностью определяют положение снаряда.

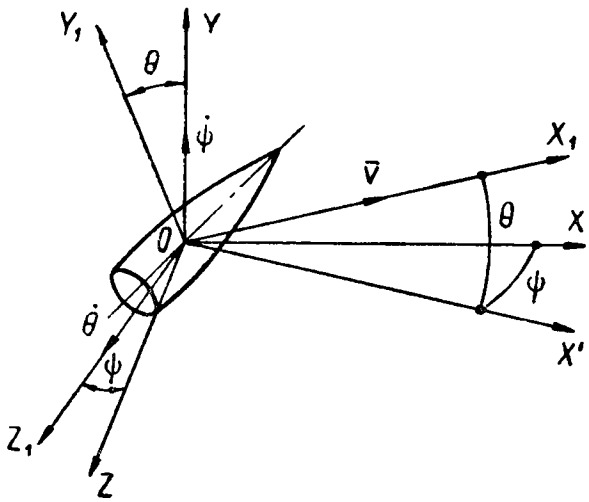


Рис. 10. Скоростная система координат

Напомним еще правило дифференцирования вектора в подвижных осях координат. Продифференцируем вектор $a=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты подвижной прямоугольной системы координат:

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\bar{i}+\frac{da_y}{dt}\bar{j}+\frac{da_z}{dt}\bar{k}+a_x\frac{d\bar{i}}{dt}+a_y\frac{d\bar{j}}{dt}+a_z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

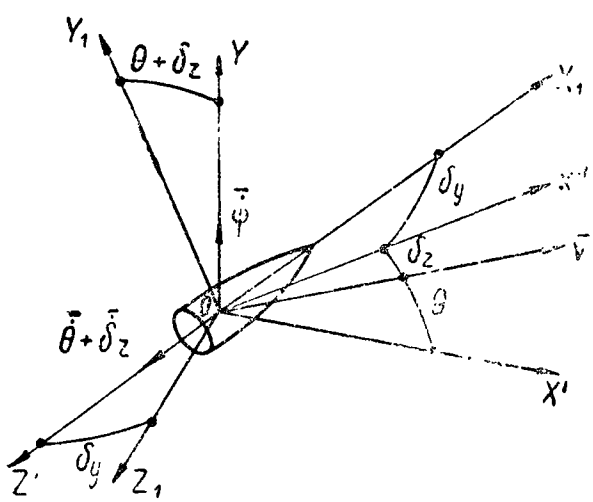


Рис. 11. Полусвязанная система координат

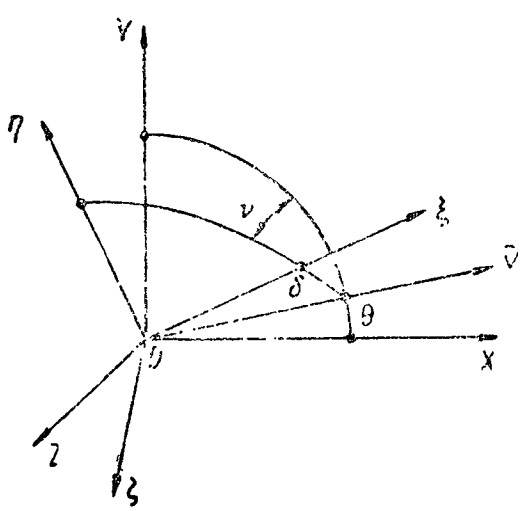


Рис 12. Система координат Эйлера

Поскольку единичные векторы не изменяют своей длины, производные по времени представляют собой линейные скорости их при вращении подвижной системы координат относительно центра O с угловой скоростью $\bar{\omega}=\omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_z\bar{k}$. Следовательно:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}.$$

Таким образом имеем:

$$a_x \frac{d\bar{i}}{dt} + a_y \frac{d\bar{j}}{dt} + a_z \frac{d\bar{k}}{dt} = a_x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + a_y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + a_z(\bar{\omega} \times \bar{k}) =$$

$$= \bar{\omega}(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{a}.$$

Окончательно можно записать:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\tilde{a}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{a};$$

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{i} + \frac{da_y}{dt}\bar{j} + \frac{da_z}{dt}\bar{k},$$

где $\frac{d\tilde{a}}{dt}$ — локальная производная;

$$\bar{\omega} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\omega_y a_z - \omega_z a_y)\bar{i} + (\omega_z a_x - \omega_x a_z)\bar{j} +$$

$$+ (\omega_x a_y - \omega_y a_x)\bar{k}.$$

2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СНАРЯДА

Векторное уравнение движения в скоростной системе координат записывается в виде

$$\frac{q}{g}\left(\frac{d\tilde{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}\right) = \bar{P} + \bar{R} + \bar{q}, \qquad (2.2.1)$$

где $\bar{P}$ — вектор реактивной силы;

$\bar{R}$ — вектор равнодействующей силы аэродинамического сопротивления.

Из аэродинамических сил будем учитывать только силы лобового сопротивления R_T и подъемную R_N. Влиянием силы Магнуса R_{MA} пренебрегаем, так как отношение $\frac{R_{MA}}{R_N}$ составляет не более 9,5%, к тому же R_{MA} косвенно учитывается через R_T и R_N.

Используя векторое уравнение (2.2.1), составим систему скалярных дифференциальных уравнений. Для этого найдем проекции векторов на оси скоростной системы координат (рис. 13):

$$\bar{q} = -q \sin\theta \bar{i} - q \cos\theta \bar{j};$$

$$\bar{P} = P \cos\delta \bar{i} + P \sin\delta (\cos\nu \bar{j} + \sin\nu \bar{k});$$

$$\bar{R} = -R_{\text{т}} \bar{i} + R_N (\cos\nu \bar{j} + \sin\nu \bar{k});$$

$$\bar{v} = v\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}; \quad \bar{\omega} = \dot{\psi} \sin\theta \bar{i} + \dot{\psi} \cos\theta \bar{j} + \dot{\theta} \bar{k}.$$

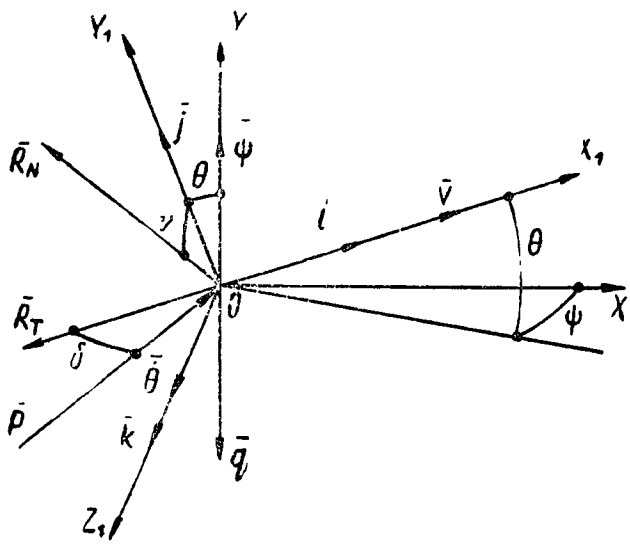


Рис. 13. Система сил, действующих на снаряд в полете

Далее находим:

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{\psi} \sin\theta & \dot{\psi} \cos\theta & \dot{\theta} \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta} v \bar{j} - \dot{\psi} v \cos\theta \bar{k}.$$

Окончательно система скалярных дифференциальных уравнений движения центра масс имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= -g \sin\theta + (P \cos\delta - R_{\text{т}}) \frac{g}{q}; \\ \dot{\theta} v &= -g \cos\theta + \frac{g}{q} R_y \cos\nu; \\ \dot{\psi} v \cos\theta &= -\frac{g}{q} R_y \sin\nu, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.2)$$

где $R_y = P \sin\delta + R_N$.

К этой системе координат следует добавить еще три кинематических уравнения:

$$\dot{x} = v\cos\theta\cos\psi; \quad \dot{y} = v\sin\theta; \quad \dot{z} = v\cos\theta\sin\psi. \tag{2.2.3}$$

С целью упрощения системы (2.2.2) в ней первое уравнение заменяют его проекцией на горизонтальную плоскость. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{g}{q}(P\cos\delta - R_{\text{т}})\cos\theta; \\ \dot{\theta}v &= -g\cos\theta + \frac{g}{q}R_y\cos\nu; \\ \dot{\psi}v\cos\theta &= -\frac{g}{q}R_y\sin\nu, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

где u — горизонтальная проекция скорости.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В КООРДИНАТАХ КРЫЛОВА

Уравнение движения около центра масс в векторной форме запишется в виде

$$\frac{\dot{d}\overline{L}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{L} = \overline{M} + \overline{M}_{\text{р}}, \tag{2.3.1}$$

где $\overline{L}$ — момент количества движения;
$\overline{M}$ — суммарный момент аэродинамических сил;
$\overline{M}_{\text{р}}$ — реактивный момент.

Решим задачу о движении снаряда около ЦМ, пренебрегая влиянием угла ψ на это движение и учитывая из аэродинамических факторов только опрокидывающий (стабилизирующий) и демпфирующий моменты.

Проектируя составляющие векторов угловых скоростей, моментов и момента количества движения (рис. 14) на оси полусвязанной системы координат, получим:

$$\overline{L} = -C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \delta_z)\sin\delta_y]\,\overline{i} + A[\dot{\delta}_y\overline{j} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y\overline{k}];$$

$$\overline{\omega} = -(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y\overline{i} + \dot{\delta}_y\overline{j} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y\overline{k};$$

$$\overline{M}_{\text{р}} = -M_{\text{р}}\overline{i} + 0\overline{j} + 0\overline{k};$$

$$\overline{M} = 0\overline{i} + (\overline{M} + \overline{M}_D)_{y_1}\overline{j} + (\overline{M} + \overline{M}_D)_{z_1}\overline{k},$$

где C — момент инерции снаряда относительно продольной оси;
A — экваториальный момент инерции.

Далее вычисляем:

$$\bar{\omega} \times \bar{L} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y & \dot{\delta}_y & (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y \\ -C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y] & A\dot{\delta}_y & A(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y \end{vmatrix} =$$

$$= (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\{A(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y - C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y]\}\cos\delta_y \bar{j} -$$

$$- \dot{\delta}_y\{[A(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y] - C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y]\}\bar{k}.$$

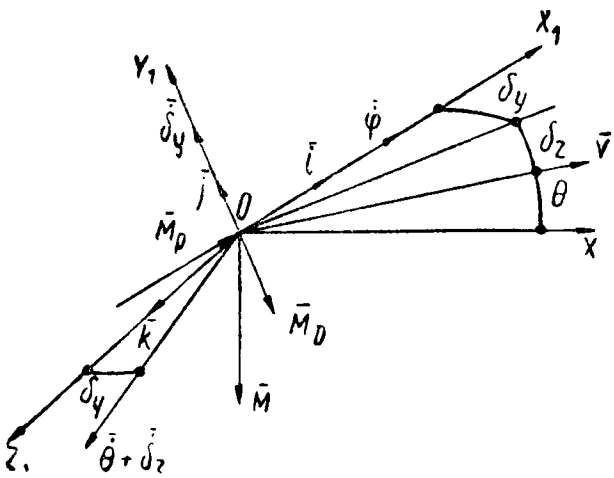


Рис. 14. Система моментов, действующих на снаряд в полете

Таким образом, в проекциях на полусвязанную систему координат уравнение (2.3.1) будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} C\frac{d}{dt}[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y] &= M_p; \\ A\ddot{\delta}_y + \{A(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y - C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y]\}(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y &= \\ = (\overline{M} + \overline{M}_D)_{y_1}; & \\ A\frac{d}{dt}[(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y] - \dot{\delta}_y\{[A(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y - & \\ - C[\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y]\} = (\overline{M} + \overline{M}_D)_{z_1}. & \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2)$$

Системы уравнений (2.2.2) или (2.2.4), (2.3.2) совместно с равенствами (2.2.3) полностью описывают движение снаряда как твердого тела.

2.4. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В КООРДИНАТАХ ЭЙЛЕРА

Система уравнений (2.3.2) описывает движение снаряда около ЦМ в самом общем виде и с удовлетворительной точностью, поскольку здесь не учтены только момент Магнуса и ускорение Кориолиса пороховых газов внутри реактивного двигателя, имеющие второстепенное значение. Однако упрощенно задачу удобнее решать в координатах Эйлера, за которые принимаются угол φ вращения снаряда относительно его полярной оси (оси симметрии), углы прецессии ν и нутации δ.

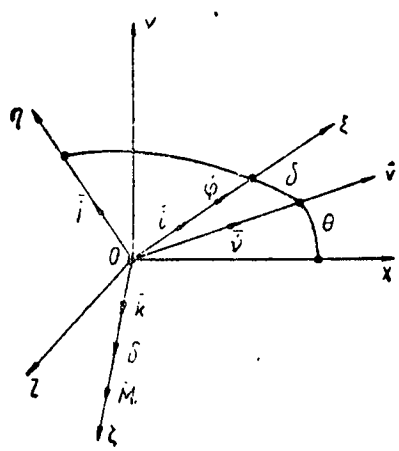


Рис. 15. К составлению уравнений движения снаряда в координатах Эйлера

Система координат Эйлера может быть построена так. Если пренебречь поворотом траектории, то вектор $\bar{v}$ лежит в плоскости бросания OXY (рис. 15). Ось снаряда занимает в пространстве произвольное относительно вектора скорости положение и составляет с ним угол нутации δ, который для устойчивых снарядов ограничен. Плоскость, проходящая через вектор скорости $\bar{v}$ и ось снаряда $O\xi$, является плоскостью сопротивления. В ней и лежит угол δ. Плоскость сопротивления $O\xi\eta$ составляет с плоскостью бросания OXY двугранный угол прецессии ν, так что вектор скорости прецессии $\dot{\bar{\nu}}$ совпадает по направлению с вектором скорости $\bar{v}$. Вектор угловой скорости собственного вращения $\dot{\bar{\varphi}}$ совпадает по направлению с осью снаряда $O\xi$, вектор скорости нутации $\dot{\bar{\delta}}$, так же как и вектор опрокидывающего момента $\bar{M}$, направлен по оси $O\zeta$, перпендикулярной к плоскости сопротивления.

Поскольку угловая скорость поворота вектора скорости $\bar{v}$ поступательного движения снаряда $|\dot{\theta}| = \frac{g\cos\theta}{v}$ мала по сравнению со скоростями прецессии и нутации, ею пренебрежем. Из силовых факторов будем учитывать только опрокидывающий момент. Тогда векторы угловой скорости и момента будут иметь вид:

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\bar{i} - \dot{\nu}\sin\delta\bar{j} + \dot{\delta}\,\bar{k};$$

$$\bar{M} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + M\bar{k}.$$

Далее можно использовать в качестве дифференциальных уравнений движения снаряда около центра масс проекции на координатные оси векторного равенства (2.3.1). В более удобном для интегрирования виде их можно получить, если воспользоваться уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (2.4.1)$$

где T — кинетическая энергия системы;

$\dot{q}_i$, q_i, Q_i — обобщенные скорости, координаты и силы соответственно.

В качестве обобщенных примем координаты Эйлера, тогда кинетическую энергию можно определить по формуле

$$2T = C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)^2 + A(\dot{\nu}^2\sin^2\delta + \dot{\delta}^2).$$

Из обобщенных сил отличной от нуля будет только сила $Q_\zeta = M$.

Спроектировав величины, входящие в уравнение (2.4.1), на ось снаряда $O\xi$, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad Q_\xi = 0.$$

Таким образом, первое уравнение примет форму

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta) = 0.$$

Определив составляющие (2.4.1) на ось $O\eta$, находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\cos\delta + A\dot{\nu}\sin^2\delta; \qquad \frac{\partial T}{\partial \nu} = 0; \quad Q_\eta = 0.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\frac{d}{dt}[C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\cos\delta + A\dot{\nu}\sin^2\delta] = 0.$$

Проекции слагаемых (2.4.1) на координатную ось $O\zeta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} = A\dot{\delta}; \qquad \frac{\partial T}{\partial \delta} = -C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\sin\delta + A\dot{\nu}^2\sin\delta\cos\delta; \qquad Q_\zeta = M,$$

поэтому

$$A\ddot{\delta} + C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\sin\delta - A\dot{\nu}^2\sin\delta\cos\delta = M.$$

Окончательно имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}[C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\cos\delta + A\dot{\nu}\sin^2\delta] = 0;$$

$$A\ddot{\delta} + C(\dot{\varphi} + \dot{\nu}\cos\delta)\sin\delta - A\dot{\nu}^2\sin\delta\cos\delta = M.$$

2.5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

Системы уравнений (2.2.2), (2.2.3) и (2.3.2), описывающие движение снаряда, могут быть решены численным интегрированием. Однако даже при использовании мощных вычислительных машин решение их осложняется тем, что процессы, описываемые отдельно каждой системой (2.2.2) и (2.3.2), протекают с различными скоростями, и для получения точного результата необходимо применять очень малый шаг. Однако точное решение и не имеет большого практического смысла, поскольку система дифференциальных уравнений, особенно часть ее, описывающая движение снаряда около центра масс, и так является приближенной в силу слабой изученности силовых факторов. В этих условиях целесообразно искать решение методом последовательных приближений.

Так как составляющая силы сопротивления R_y содержит знакопеременный множитель $\cos\nu$ или $\sin\nu$, можно полагать, что результирующее действие соответствующих членов на положение точки падения снаряда не велико и с некоторым приближением они равны нулю. Тогда системы уравнений (2.2.2) и (2.2.3) обращаются в независимую систему нулевого приближения:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{v} = -g\sin\theta + \frac{g}{q}R_x; \quad \dot{\theta}v = -g\cos\theta; \quad \dot{\psi} = 0; \\ &\dot{x} = u = v\cos\theta; \quad \dot{y} = w = v\sin\theta; \quad \dot{z} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.1)$$

где $R_x = P\cos\delta - R_x$.

Если воспользоваться системой (2.2.4), то первое уравнение запишется в виде

$$\dot{u} = \frac{g}{q}R_x\cos\theta,$$

а остальные будут иметь ту же форму, что и в системе (2.5.1). Определив отсюда значения θ, $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, можем считать их в системе (2.3.2) величинами известными, сведя таким образом изучение движения снаряда около центра масс к решению неоднородной

системы уравнений с известной правой частью. Решив систему уравнений нулевого приближения, можно приступить к составлению и решению уравнений первого приближения. При этом оказывается достаточным уточнить лишь элементы траектории центра масс снаряда, довольствуясь нулевым приближением для изучения движения снаряда около центра масс.

При составлении уравнений первого приближения необходимо помнить, что коэффициент формы снаряда определяется непосредственно стрельбой, т. е. с учетом вращательного движения снаряда. Поэтому значение силы сопротивления воздуха и, следовательно, значения скоростей будем считать определенными в нулевом приближении окончательно. Для остальных параметров траектории примем выражения:

$$x = x^0 + x_1; \quad y = y^0 + y_1; \quad z = z_1;$$

$$\theta = \theta^0 + \theta_1; \quad \psi = \psi_1,$$

в которых индексами «0» и «1» помечены величины нулевого и первого приближения соответственно. В дальнейших преобразованиях будем считать величины первого приближения достаточно малыми, чтобы в отношении угловых параметров оказывались справедливыми приближенные равенства:

$$\sin(\theta^0 + \theta_1) = \sin\theta^0 \cos\theta_1 + \cos\theta^0 \sin\theta_1 \approx \sin\theta^0 + \theta_1 \cos\theta^0;$$

$$\cos(\theta^0 + \theta_1) = \cos\theta^0 \cos\theta_1 - \sin\theta^0 \sin\theta_1 = \cos\theta^0 - \theta_1 \sin\theta^0;$$

$$\sin\psi_1 = \psi; \quad \cos\psi_1 = 1.$$

Тогда система (2.2.2) может быть переписана в виде:

$$\dot{\theta}^0 v^0 + v^0 \dot{\theta}_1 = -g\cos\theta^0 + \theta_1 g \sin\theta^0 + \frac{g}{q} R_y \cos\nu;$$

$$\dot{\psi} v^0 \cos\theta^0 = -\frac{g}{q} R_y \sin\nu;$$

$$\dot{x}^0 + \dot{x}_1 = v^0 \cos\theta^0 - \theta_1 v^0 \sin\theta^0;$$

$$\dot{y}^0 + \dot{y}_1 = v^0 \sin\theta^0 + \theta_1 v^0 \cos\theta^0;$$

$$\dot{z}_1 = \psi v^0 \cos\theta^0.$$

Учитывая, что члены нулевого приближения удовлетворяют уравнениям (2.5.1), получим окончательную систему первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\theta}_1 v - \theta_1 g \sin\theta = \frac{g}{q} R_y \cos\nu;\\
&\dot{\psi} v \cos\theta = -\frac{g}{q} R_y \sin\nu;\\
&\dot{x}_1 = -\theta_1 v \sin\theta;\\
&\dot{y}_1 = \theta_1 v \cos\theta;\\
&\dot{z}_1 = \psi v \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5.2)$$

В этой системе индексы «0» опущены.

2.6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СНАРЯДА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АРГУМЕНТАХ

В некоторых случаях систему (2.5.1) удобно интегрировать не по аргументу t (время), а по некоторому другому параметру. Так, для снарядов постоянной массы определяющей величиной является дальность их полета, вследствие чего интегрирование целесообразно вести сразу по аргументу x (горизонтальная дальность). Иногда удобно в качестве аргумента брать угол θ.

Перепишем систему (2.5.1) для случая, когда отсутствует реактивная сила ($P=0$):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = -c_1 \Delta(y)\, v^2 c_x \left(\frac{v}{a}\right) \cos\theta;\\
&\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v};\\
&\frac{dx}{dt} = u = v\cos\theta;\\
&\frac{dy}{dt} = w = v\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6.1)$$

Из третьего уравнения системы следует, что $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v\cos\theta}$. Умножая на это равенство почленно остальные выражения (2.6.1) и учитывая, что

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\gamma^2}; \quad \frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx},$$

где $\gamma = \operatorname{tg}\theta$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = -c_1\Delta(y)\,vc_x\left(\frac{v}{a}\right);\\ &\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{g}{u^2};\quad \frac{dy}{dx} = \gamma;\\ &\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u};\quad v = u\sqrt{1+\gamma^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.2)$$

Согласно второй формуле системы (2.6.1) имеем $\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g\cos\theta}$. Умножая почленно остальные выражения (2.6.1) на последнее равенство, напишем новую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{g}c_1\Delta(y)\,v^3c_x\left(\frac{v}{a}\right);\\ &\frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g};\quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\theta;\\ &\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.3)$$

Полученная система уравнений по сравнению с (2.6.1) и (2.6.2) имеет то преимущество, что в ней оказываются совместными только два уравнения — первое и третье (в системах при аргументах t и x — по три совместных уравнения). Более того, для траекторий с небольшими начальными скоростями и, следовательно, низкими высотами полета, можно пренебречь изменением плотности воздуха с высотой или учесть ее некоторым средним значением. Тогда первое выражение, которое называется уравнением годографа скорости, оказывается независимым от других равенств системы (2.6.3) и при некоторых обстоятельствах может быть проинтегрировано в аналитическом виде. В этом случае определение величин x, y, t сводится к вычислению соответствующих интегралов.

Глава III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

3.1. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Для тяжелых снарядов, движущихся с малыми скоростями, в первом приближении можно пренебречь влиянием сопротивления воздуха на траекторию движения. В этом случае правая часть первого из уравнений (2.6.2) обращается в нуль и система принимает вид:

$$\frac{du}{dx}=0;\quad \frac{d\gamma}{dx}=-\frac{g}{u^2};\quad \frac{dy}{dx}=\gamma;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{u};\quad v=u\sqrt{1+\gamma^2}.$$

Интегрируя последовательно уравнения этой системы при начальных условиях $t=0$, $x=y=0$, $u=u_0$ и $\gamma=\gamma_0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &u=u_0=\text{const};\quad \gamma=\gamma_0-\frac{g}{u_0^2}x;\\ &y=\gamma_0 x-\frac{g}{2u_0^2}x^2;\quad t=\frac{1}{u_0}x. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.1}$$

Как видим, траектория в плоскости OXY при отсутствии сопротивления воздуха имеет вид параболы. Создателями этой параболической теории являются Галилей и Тартилья.

Координату x_s вершины траектории определим из условия, что $\operatorname{tg}\theta_s=0$. Тогда из второго выражения (3.1.1) имеем

$$x_S=\frac{u_0^2\gamma_0}{g}. \tag{3.1.2}$$

Подставляя это значение в третье соотношение системы (3.1.1), получим полную высоту траектории

$$y_S=\frac{u_0^2\gamma_0^2}{2g}=\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}. \tag{3.1.3}$$

Для определения абсциссы точки падения служит условие $y_c = 0$. Тогда из третьего равенства системы (3.1.1) найдем

$$X = \frac{2u_0^2\gamma_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \tag{3.1.4}$$

Подставляя это значение во второе и четвертое уравнения системы (3.1.1), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_c &= \gamma_0 - \frac{g}{u_0^2}\,\frac{2u_0^2\gamma_0}{g} = -\gamma_0; \\ T &= \frac{2u_0\gamma_0}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.5}$$

Анализируя и сравнивая между собой выражения (3.1.2) — (3.1.5), можем сформулировать некоторые свойства траектории, построенной без учета сопротивления воздуха: угол падения по абсолютной величине равен углу бросания, а полная дальность полета снаряда в два раза больше дальности до вершины траектории. Это наводит на мысль о симметричности параболической траектории относительно вертикальной оси, проходящей через вершину. Для доказательства симметричности введем новые переменные x_1 и y_1 по формулам:

$$x = x_1 + \frac{u_0^2\gamma_0}{g}; \quad y = y_1.$$

Подставляя эти значения в уравнение траектории, получим

$$y_1 = \gamma_0\left(x_1 + \frac{u_0^2\gamma_0}{g}\right) - \frac{g}{2u_0^2}\left(x_1 + \frac{u_0^2\gamma_0}{g}\right)^2$$

или

$$y_1 = \frac{u_0^2\gamma_0^2}{2g} - \frac{g}{2u_0^2}\,x_1^2.$$

В последнем выражении отсутствует член с x_1 в первой степени, что и доказывает симметричность траектории.

Симметричность графика скорости следует из выражения $v = u_0\sqrt{1+\gamma^2}$, поскольку симметричность траектории требует равенства по абсолютной величине углов наклона касательной к траектории в точках, расположенных на одинаковой высоте.

Итак, известны следующие свойства траектории:

1. Траектория симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через ее вершину.

2. Угол падения равен углу бросания.

3. Скорости в двух точках, находящихся на одной высоте, равны, вследствие чего скорость падения равна начальной скорости.

4. Скорость снаряда убывает с высотой и достигает минимального значения в вершине ($\gamma=0$).

5. Наибольшая дальность получается при угле бросания $\theta_0=45°$. Это свойство следует непосредственно из выражения для полной дальности (3.1.4), если в него подставить $\theta_0=45°$ ($\sin 2\cdot 45°=1$). Угол максимальной дальности для траекторий, построенных с учетом сопротивления воздуха, может отличаться от 45° (рис. 16). Увеличение его свыше 45° при больших начальных скоростях и малых баллистических коэффициентах объясняется тем, что в этом случае большая часть траектории будет пролегать в разреженных верхних слоях тропосферы и стратосферы.

Напишем уравнение семейства траекторий, отвечающих различным углам бросания, в виде

$$y = x\gamma_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\gamma_0^2), \quad (3.1.6)$$

где $\gamma_0=\operatorname{tg}\theta_0$ — параметр семейства кривых.

Для отыскания огибающей этих кривых необходимо продифференцировать уравнение семейства по параметру и из полученного выражения, а также из уравнения семейства исключить параметр. Дифференцируя равенство (3.1.6) по параметру γ_0, найдем:

$$0 = x - \frac{gx^2}{v_0^2}\gamma_0; \qquad \gamma_0 = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Подставляя это значение в формулу (3.1.6), получим

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (3.1.7)$$

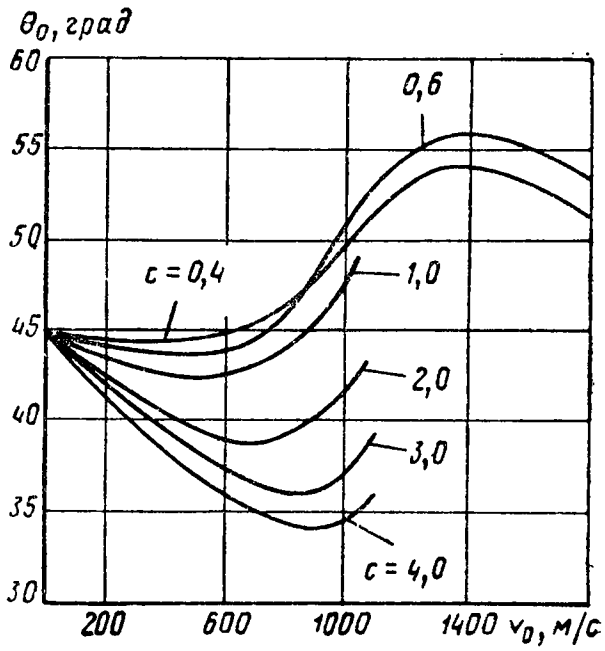


Рис. 16. Графики изменения угла наибольшей дальности для разных значений c и v_0

В этом соотношении отсутствуют нечетные степени x. Следовательно, ось $x=0$ является осью симметрии огибающей.

Решая уравнение (3.1.6) относительно $\gamma_0=\operatorname{tg}\theta_0$, получим

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{v_0^2}{gx}\left[1 \pm \sqrt{\frac{2g}{v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y\right)}\right].$$

Для точек, лежащих на огибающей, выражение в круглых скобках обращается в нуль, так как существует зависимость (3.1.7). При этом имеем одно значение для определения γ_0. Для точек, лежащих внутри огибающей, $y < \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\right)$ и имеем два решения для γ_0.

Для точек, лежащих за пределами огибающей, $y > \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\right)$ и для определения γ_0 нет действительных решений, т. е. за пределами огибающей не может быть поражена ни одна точка при любом угле бросания. Поэтому огибающая называется параболой безопасности. Отсюда имеем следующее важное свойство траектории.

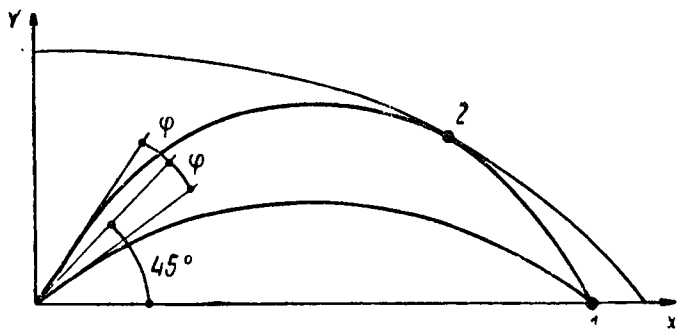


Рис. 17. Парабола безопасности

6. Любая точка *1* внутри параболы безопасности (рис. 17) может быть поражена при двух различных углах бросания. Любая точка *2* на параболе безопасности может быть поражена при одном, строго определенном угле бросания.

Аналогичное свойство справедливо и для траекторий снарядов, испытывающих значительное сопротивление воздуха. Оно используется для выбора наивыгоднейшей траектории — навесной или настильной. Так, для поражения видимых объектов чаще всего оказывается выгодной настильная траектория. Для артиллерийского обстрела противника, укрывшегося в окопах, рациональнее использовать навесную траекторию.

Из выражения для полной дальности (3.1.4) следует, что для параболической траектории одинаковые дальности достигаются при углах бросания $\theta_0 = 45° \pm \varphi$, где φ — угол, соответствующий заданной дальности.

Многие выводы, которые могут быть получены с помощью параболической теории, оказываются применимыми и для реальных траекторий. Так, параболической теорией широко пользуются для построения приближенных формул в теории поправок.

3.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПРЯМОГО ВЫСТРЕЛА

Известно, что функция $f(x)$ в окрестностях точки $x=0$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2!} f_0'' + \frac{x^3}{3!} f_0''' + \dots \quad . \tag{3.2.1}$$

Если учесть в разложении только n первых членов, то остаточный член (ошибка аппроксимации) имеет величину

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}.$$

На основании теоремы о среднем можно доказать, что ряд Тейлора будет точно представлять функцию в данной точке, если последняя из учитываемых производных вычисляется в некоторой средней точке ξ. Правила, позволяющего зафиксировать точку ξ, нет, однако, если взять в качестве этой точки среднее арифметическое (для данного отрезка) значение аргумента, то точность ряда (3.2.1) при ограниченном числе членов возрастает. Действительно, представим ряд (3.2.1) в виде

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \dots + \frac{x^n}{n!} f_{\text{ср}}^{(n)}, \tag{3.2.2}$$

где $f_{\text{ср}}^{(n)} = f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$.

В этом случае остаточный член

$$R_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} f_{\text{ср}}^{(n+2)},$$

т. е. точность ряда (3.2.2) соответствует точности ряда (3.2.1) с лишним членом.

Учитывая сказанное, вычислим по системе (2.6.2) последовательно:

$$y_0 = 0; \quad y' = \gamma; \quad y'' = \gamma' = -\frac{g}{u^2};$$

$$y''' = \gamma'' = \frac{2g}{u^3} \frac{du}{dx} = -\frac{2g}{u^3} c_1 \Delta(y) c_x \left(\frac{v}{a}\right) v.$$

Вычислять производные дальше нецелесообразно, так как при

этом придется дифференцировать табличные функции. Таким образом, имеем

$$y = \gamma_0 x - \frac{gx^2}{2u_0^2} - \frac{gx^3}{3u_{ср}^2} b, \qquad (3.2.3)$$

где $$b = c_1 \Delta(y_{ср}) c_x \left(\frac{v}{a}\right)_{ср} \frac{1}{\cos\theta}.$$

В отдельных случаях целесообразно ограничиться двумя первыми членами ряда (3.2.3).

Используем эти зависимости для получения формул, определяющих прямой выстрел, при котором высота траектории не превышает высоты цели.

При такой стрельбе практическая скорострельность оружия увеличивается, поскольку отпадает необходимость осуществлять установку прицела по вертикали. Для стрелкового оружия в пределах дальности прямого выстрела высота цели принимается равной 0,5 м. Для пулеметов, особенно крупнокалиберных, возможно определение дальности прямого выстрела по бегущей фигуре (1,70 м). Для противотанковой артиллерии дальность прямого выстрела определяется высотой цели 2 м.

Дальность прямого выстрела характеризуется малыми углами бросания, поэтому можно принять: $\cos\theta = 1$; $u = v$; $\Delta(y) = 1$. Кроме того, для малых дальностей можно считать, что $b = c_1 c_x \left(\frac{v}{a}\right) = \text{const}$. Тогда справедлива запись:

$$\left.\begin{aligned} y &= \gamma_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^3}{3v_{ср}^2} b; \\ \gamma &= \gamma_0 - \frac{gx}{v_0^2} - \frac{gx^2}{v_{ср}^2} b. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.4)$$

Для точки падения $y_c = 0$, для вершины траектории $\gamma_s = 0$, поэтому:

$$\gamma_0 - \frac{gX}{2v_0^2} - \frac{gX^2}{3v_{ср}^2} b = 0;$$

$$\gamma_0 - \frac{gx_s}{v_0^2} - \frac{gx_s^2}{v_{ср}^2} b = 0.$$

Исключая из этих равенств γ_0, получим

$$x_s = \frac{X}{2} + b \left(\frac{v_0}{v_{ср}}\right)^2 \left(\frac{X^2}{3} - x_s^2\right).$$

Это уравнение целесообразно решать методом последовательных приближений, считая второе слагаемое в правой части малым. Принимая в первом приближении $x_s = \frac{1}{2} X$ и подставляя это значение в правую часть, найдем, что

$$x_s = \frac{X}{2} + \frac{bX^2}{12}\left(\frac{v_0}{v_{ср}}\right)^2 . \qquad (3.2.5)$$

Далее, используя первое равенство (3.2.4), запишем:

$$y_s = Y = \gamma_0 x_s - \frac{g x_s^2}{2v_0^2} - \frac{g x_s^3}{3 v_{ср}^2} b = \left(\gamma_0 - \frac{g x_s}{v_0^2} - \frac{g x_s^2}{v_{ср}^2} b\right) x_s +$$

$$+ \frac{g x_s^2}{2v_0^2} + \frac{2}{3}\frac{g x_s^3}{v_{ср}^2} b = \frac{g x_s^2}{2v_0^2} + \frac{2}{3}\frac{g x_s^3}{v_{ср}^2} b.$$

Подставляя значение (3.2.5) в это выражение и ограничиваясь членами первого порядка малости, получим

$$Y = \frac{gX^2}{8v_0^2}\left[1 + bX\left(\frac{v_0}{v_{ср}}\right)^2\right].$$

Откуда имеем

$$X = 2v_0 \sqrt{\frac{2Y}{g\left[1 + bX\left(\frac{v_0}{v_{ср}}\right)^2\right]}}, \qquad (3.2.6)$$

где $v_{ср} = \frac{v_0}{1 + 0{,}5bX}$.

Уравнение (3.2.6) также надо решать методом последовательных приближений.

Пример. Вычислить дальность прямого выстрела пулемета при следующих данных: калибр $d = 7{,}62$ мм; масса пули $q = 9{,}6$ г; коэффициент формы к закону 1943 г. $i_{43} = 1{,}14$; начальная скорость $v_0 = 825$ м/с.

Решение. Вычисляем коэффициенты:

$$c = \frac{id^2}{q} 1000 = \frac{1{,}14\,(7{,}62)^2\,10^{-6}}{9{,}6 \cdot 10^{-3}} 10^3 = 6{,}9 \text{ м}^2/\text{кг};$$

$$c_1 = 4{,}81 \cdot 10^{-4} c = 4{,}81 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}9 = 0{,}332 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{кг};$$

$$c_x(825) = 0{,}292; \quad b = 0{,}332 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}292 = 0{,}097 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Подсчитываем нулевое приближение:

$$X = 2v_0 \sqrt{\frac{2Y}{g}} = 2 \cdot 825 \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 2}{9{,}81}} = 527 \text{ м};$$

$$v_{ср} = v_0 = 825 \text{ м/с}.$$

Рассчитываем величины:
в первом приближении

$$X = \frac{527}{\sqrt{1+bX}} = \frac{527}{\sqrt{1+0{,}097\cdot 10^{-2}\cdot 527}} = 430 \text{ м};$$

$$v_{ср} = \frac{v_0}{1+0{,}5bX} = \frac{825}{1+0{,}5\cdot 0{,}097\cdot 10^{-2}\cdot 430} = 683 \text{ м/с};$$

во втором приближении

$$X = \frac{527}{\sqrt{1+bX\left(\frac{v_0}{v_{ср}}\right)^2}} = \frac{527}{\sqrt{1+0{,}097\cdot 10^{-2}\cdot 430\left(\frac{825}{683}\right)^2}} = 416 \text{ м};$$

$$v_{ср} = \frac{825}{1+0{,}5\cdot 0{,}097\cdot 10^{-2}\cdot 416} = 686 \text{ м/с};$$

в третьем приближении

$$X = \frac{527}{\sqrt{1+0{,}097\cdot 10^{-2}\cdot 416\left(\frac{825}{686}\right)^2}} = 419 \text{ м}.$$

Дальнейшие приближения делать не имеет смысла. Окончательно принимаем значение дальности прямого выстрела $X=419$ м. Точное значение этой дальности для данного примера $X=420$ м.

При других способах вычисления дальности прямого выстрела также приходится прибегать к методу последовательных приближений. Однако изложенный способ обладает большой наглядностью и удобен для предварительных анализов.

3.3. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Метод Эйлера относится к дозвуковым начальным скоростям ($v_0 \leqslant 280$ м/с), когда закон сопротивления квадратичный $\left[c_x\left(\frac{v}{a}\right) = \text{const}\right]$. Предельное значение высоты при этих скоростях подсчитывается по формуле (3.1.3) при $\theta_0=45°$:

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{280^2}{2\cdot 2\cdot 9{,}81} = 2000 \text{ м}.$$

Из приложения 1 находим $\frac{\rho}{\rho_c} = \Delta(y) = \Delta(2000) = 0{,}8217$, т. е. плотность меняется незначительно. В этом случае без существенного ущерба для точности можно принять $\Delta(y) = \Delta(y_{ср}) =$

$=\text{const}$, где $y_{\text{ср}}=\frac{2}{3}Y$. Поскольку в начале вычислений величина $y_{\text{ср}}$ неизвестна, приходится применять метод последовательных приближений. В первом приближении принимают $\Delta(y)=1$, решают задачу, затем уточняют значение $y_{\text{ср}}$ и $\Delta(y_{\text{ср}})$.

Рассмотрим систему уравнений при аргументе θ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{g}c_1\Delta(y)\frac{u^3}{\cos^3\theta}c_x\left(\frac{u}{a\cos\theta}\right);\\&\frac{dx}{d\theta}=-\frac{u^2}{g\cos^2\theta};\quad\frac{dy}{d\theta}=-\frac{u^2\sin\theta}{g\cos^3\theta};\quad\frac{dt}{d\theta}=-\frac{u}{g\cos^2\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(3.3.1)$$

Обозначим

$$b=c_1\Delta(y_{\text{ср}})c_x\left(\frac{v}{a}\right)=\text{const},$$

тогда первое уравнение (уравнение годографа) системы (3.3.1) можем записать в виде

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{b}{g}\frac{u^3}{\cos^3\theta}.$$

Разделим переменные

$$\frac{du}{u^3}=\frac{b}{g}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

и выполним интегрирование

$$\frac{1}{u^2}=\frac{1}{u_0^2}-\frac{2b}{g}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

Обозначим:

$$\xi(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right];$$

$$\xi(\theta_A)=\frac{g}{2bu_0^2}+\xi(\theta_0).$$

После несложных преобразований найдем

$$u^2=\frac{g}{2b}\frac{1}{\xi(\theta_A)-\xi(\theta)}.\qquad(3.3.2)$$

Подставляя это значение в остальные уравнения (3.3.1), разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2b}\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A)-\xi(\theta)]\cos^2\theta}; \\ y &= \frac{1}{2b}\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\operatorname{tg}\theta\cdot d\theta}{[\xi(\theta_A)-\xi(\theta)]\cos^2\theta}; \\ t &= \frac{1}{\sqrt{2bg}}\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\xi(\theta_A)-\xi(\theta)}\cos^2\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.3)$$

Расчеты по этим формулам осуществляется любым численным методом и легко программируются на ЭВМ. Эйлер предлагал брать интегралы в выражениях (3.3.3) способом, известным под названием метода дуг.

3.4. ТАБЛИЦЫ ОТТО—СИАЧЧИ

В общем случае траектория снаряда определяется тремя параметрами c, v_0, θ_0, поэтому при составлении баллистических таблиц приходилось рассчитывать большое количество траекторий, отвечающих различным комбинациям указанных начальных параметров. Таблицы с тремя входами получаются крайне громоздкими. Метод Эйлера позволяет сократить число параметров, определяющих траекторию, до двух и тем самым существенно сократить объем баллистических таблиц.

Разделим уравнение (3.3.2) на u_0^2:

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 = \frac{g}{2bu_0^2}\,\frac{1}{\xi(\theta_A)-\xi(\theta)}. \qquad (3.4.1)$$

Так как

$$\xi(\theta_A) = \xi(\theta_0) + \frac{g}{2bv_0^2\cos^2\theta_0} = \varphi(\theta_0;\ bv_0^2),$$

то правая часть равенства (3.4.1) является функцией двух начальных параметров θ_0 и bv_0^2. Таким же способом для выражений (3.3.3) получим:

$$2bx = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A)-\xi(\theta)]\cos^2\theta} = \varphi_1(\theta_0;\ bv_0^2;\ \theta);$$

$$2by = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)]\cos^2\theta} = \varphi_2(\theta_0;\ bv_0^2;\ \theta);$$

$$\sqrt{2bg}\ t = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)}\cos^2\theta} = \varphi_3(\theta_0;\ bv_0^2;\ \theta),$$

т. е. для различных траекторий с определенными величинами θ_0 и bv_0^2 одинаковым углам θ соответствуют одинаковые значения $2bx$, $2by$, и $\sqrt{2bg}\,t$. Таблицы значений этих величин были вычислены Отто (таблицы первого рода) для углов бросания 30—75° и дополнены для меньших углов Лардильоном и Шеве. На основе этих таблиц Сиаччи составил таблицы второго рода, значительно облегчающие расчеты. Эти так называемые таблицы Отто-Сиаччи дают значения величин

$$\frac{bv_0^2}{g};\quad \frac{v_0^2}{2gX};\quad |\theta_c|;\quad \frac{v_c}{v_0};\quad \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}};\quad \frac{Y}{X}$$

по входным параметрам θ_0 и $2bX$ (табл. 3).

Пример. Вычислить дальность полета гранаты при следующих начальных данных: $d=30$ мм; $q=270$ г; $i_{43}=1{,}37$; $v_0=180$ м/с; $\theta_0=30°$.

Решение. Для закона 1943 г., к которому приведен коэффициент формы, при $v_0<290$ м/с $c_x\left(\frac{v}{a}\right)=0{,}157$.

Вычисляем в первом приближении ($\Delta(y)=1$):

$$b_1 = 0{,}48\frac{id^2}{q}\,c_x\left(\frac{v}{a}\right) = 0{,}0755\,\frac{1{,}37\,(0{,}03)^2}{0{,}270} = 3{,}45\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{кг};$$

$$\left(\frac{b_1v_0^2}{g}\right)_1 = \frac{3{,}45\cdot10^{-4}\cdot180^2}{9{,}81} = 1{,}140\ \text{м}^3/\text{кг}.$$

По этому значению из таблиц Отто-Сиаччи (см. табл. 3) находим интерполированием $2bX=1{,}217$; $\frac{Y}{X}=0{,}178$, откуда получим:

$$X = \frac{1{,}217}{2\cdot3{,}45\cdot10^{-4}} = 1760\ \text{м};$$

$$Y = 0{,}178\cdot1760 = 312\ \text{м};$$

$$y_{\text{ср}} = \frac{2}{3}Y = \frac{2}{3}312 = 208\ \text{м}.$$

Выдержка из таблиц Отто—Сиаччи

$\theta_0 = 30°$						
$2bX$	$\frac{bv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\lvert\theta_C\rvert$	$\frac{v_c}{v_0}$	$\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$	$\frac{Y}{X}$
0,00	0,000	0,577	30°00′	1,000	1,075	0,144
0,05	0,030	0,587	30°27′	0,979	1,080	0,145
0,10	0,061	0,598	30°54′	0,958	1,085	0,147
0,15	0,092	0,609	31°21′	0,937	1,089	0,148
0,20	0,124	0,620	31°47′	0,916	1,094	0,149
0,25	0,158	0,632	32°14′	0,896	1,098	0,151
0,30	0,193	0,644	32°40′	0,877	1,103	0,152
0,35	0,230	0,657	33°08′	0,858	1,108	0,153
0,40	0,268	0,670	33°35′	0,840	1,112	0,154
0,45	0,307	0,683	34°02′	0,822	1,116	0,155
0,50	0,348	0,696	34°29′	0,805	1,121	0,157
0,55	0,390	0,709	34°57′	0,788	1,126	0,158
0,60	0,434	0,723	35°24′	0,772	1,131	0,159
0,65	0,479	0,738	35°51′	0,756	1,136	0,161
0,70	0,527	0,753	36°19′	0,740	1,141	0,162
0,75	0,577	0,769	36°48′	0,724	1,145	0,164
0,80	0,628	0,785	37°16′	0,709	1,149	0,165
0,85	0,681	0,801	37°44′	0,695	1,153	0,166
0,90	0,730	0,818	38°13′	0,681	1,158	0,168
0,95	0,793	0,835	38°42′	0,667	1,162	0,169
1,00	0,853	0,853	39°11′	0,653	1,167	0,171
1,05	0,915	0,871	39°41′	0,640	1,172	0,172
1,10	0,979	0,890	40°10′	0,627	1,176	0,174
1,15	1,046	0,910	40°40′	0,614	1,181	0,175
1,20	1,116	0,930	41°10′	0,602	1,186	0,177
1,25	1,188	0,951	41°39′	0,590	1,191	0,179
1,30	1,264	0,973	42°09′	0,578	1,195	0,181
1,35	1,343	0,995	42°39′	0,566	1,199	0,182
1,40	1,425	1,018	43°09′	0,554	1,203	0,183
1,45	1,510	1,041	43°38′	0,543	1,208	0,185
1,50	1,599	1,066	44°07′	0,533	1,212	0,186

Из приложения I находим интерполированием $\frac{\rho}{\rho_c} = \Delta(208) = 0{,}9802$. Уточняем решение:

$$b = b_1 \Delta(y_{ср}) = 3{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9802 = 3{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{кг};$$

$$\frac{bv_0^2}{g} = \left(\frac{b_1 v_0^2}{g}\right)_1 \Delta(y_{ср}) = 1{,}140 \cdot 0{,}9802 = 1{,}120 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

По этому значению с помощью таблиц Отто-Сиаччи, применяя интерполирование (табл. 4), окончательно находим:

$$X = \frac{2bX}{2b} = \frac{1{,}203}{2 \cdot 3{,}38 \cdot 10^{-4}} = 1780 \text{ м}; \quad |\theta_c| = 41°12';$$

$$v_c = \frac{v_c}{v_0} v_0 = 0{,}601 \cdot 180 = 108 \text{ м/с};$$

$$T = \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}} \sqrt{\frac{X}{g}} = 1{,}186 \sqrt{\frac{1780}{9{,}81}} = 16 \text{ с};$$

$$Y = \frac{Y}{X} X = 0{,}177 \cdot 1780 = 317 \text{ м}.$$

Если бы значение угла θ_0 не совпадало с табличным, пришлось бы интерполировать еще и по этому параметру (таблицы Отто-Сиаччи были составлены для $15° \leqslant \theta_0 \leqslant 75°$ с интервалом $\Delta\theta_0 = 5°$). Тем не менее в отсутствие вычислительных машин метод Эйлера существенно ускорял составление таблиц стрельбы.

Таблица 4

Пример интерполирования

$2bX$	$\frac{bv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\lvert\theta_c\rvert$	$\frac{v_c}{v_0}$	$\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$	$\frac{Y}{X}$
1,20	1,116	0,930	41°10′	0,602	1,186	0,177
1,203	1,120	0,931	41°12′	0,601	1,186	0,177
1,25	1,188	0,951	41°39′	0,590	1,191	0,179

3.5. МЕТОД СИАЧЧИ

Как уже указывалось, системы уравнений основной задачи внешней баллистики в общем случае не позволяют разделить переменные. Однако в отдельных случаях путем некоторых упрощений удается свести систему к уравнениям с разделяющимися переменными, как это было сделано в методе Эйлера.

Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} u' &= -c\Delta(y)\frac{u}{\cos\theta}K_{\text{т}}\left(\frac{u}{a\cos\theta}\right); \\ \gamma' &= -\frac{g}{u^2}; \quad y' = \gamma; \quad t' = \frac{1}{u}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5.1}$$

Метод Сиаччи был разработан применительно к расчету настильных траекторий стрелкового оружия, для которых $\cos\theta \approx 1$, $\Delta(y) = 1$. Последнее обстоятельство позволяет заменить в первой части первого уравнения действительную скорость $v = \dfrac{u}{\cos\theta}$ некоторым приближенным ее значением $\bar{u} = \dfrac{u}{\cos\theta_0}$, называемым псевдоскоростью.

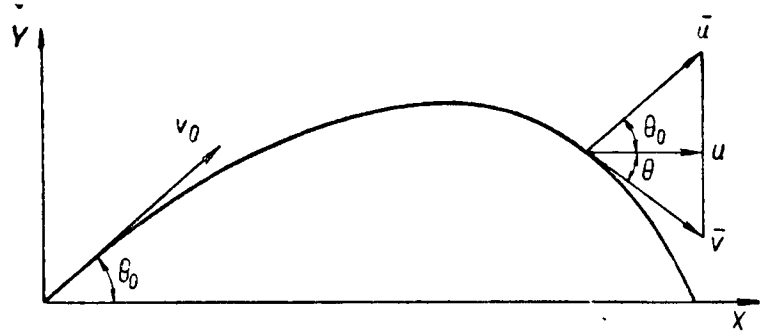


Рис. 18. К расчету траектории по методу Сиаччи

Псевдоскорость $\bar{u}$ представляет собой неизменный по направлению вектор, горизонтальная проекция которого совпадает с горизонтальной проекцией действительной скорости (рис. 18). Заметим, что $\bar{u}_0 = v_0$. Поскольку правая часть первого уравнения (3.5.1) приблизительно пропорциональна первой степени скорости, а на большей части траектории $\bar{u} > v$, то прямая замена v на $\bar{u}$ ведет к завышению силы сопротивления воздуха. Чтобы компенсировать это завышение, а также учесть изменение плотности воздуха с высотой, Сиаччи принял

$$c\Delta(y)\frac{u}{\cos\theta}K_{\text{т}}\left(\frac{u}{a\cos\theta}\right) = \beta c\bar{u}K_{\text{т}}\left(\frac{\bar{u}}{a_0}\right)\cos\theta_0, \tag{3.5.2}$$

где β — некоторый постоянный для данной траектории коэффициент.

Если еще ввести понятие приведенного баллистического коэффициента $c' = \beta c$, то формулы (3.5.1) примут вид системы с разделяющимися переменными:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}' &= -c'\bar{u}K_{\text{т}}(\bar{u}); \quad \gamma' = -\frac{g}{\bar{u}^2\cos^2\theta_0}; \\ y' &= \gamma; \quad t' = \frac{1}{\bar{u}\cos\theta_0}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5.3}$$

Из первого уравнения системы (3.5.3) имеем

$$dx = -\frac{1}{c'}\,\frac{d\bar{u}}{\bar{u}K_T(\bar{u})}. \tag{3.5.4}$$

Интегрируя в соответствующих пределах, найдем, что

$$x = -\frac{1}{c'}\int_{v_0}^{\bar{u}}\frac{d\bar{u}}{\bar{u}K_T(\bar{u})}.$$

Обозначим

$$D(\bar{u}) = -\int_{2000}^{\bar{u}}\frac{d\bar{u}}{\bar{u}K_T(\bar{u})};$$

тогда

$$x = \frac{1}{c'}[D(\bar{u}) - D(v_0)]. \tag{3.5.5}$$

Из второго уравнения системы (3.5.3) с учетом выражения (3.5.4) получим

$$d\gamma = -\frac{gdx}{\bar{u}^2\cos^2\theta_0} = \frac{g}{c'\cos^2\theta_0}\,\frac{d\bar{u}}{\bar{u}^3K_T(\bar{u})}.$$

Интегрируем в соответствующих пределах:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{g}{c'\cos^2\theta_0}\int_{v_0}^{\bar{u}}\frac{d\bar{u}}{\bar{u}^3K_T(\bar{u})}.$$

Если обозначить

$$J(\bar{u}) = -\int_{2000}^{\bar{u}}\frac{2gd\bar{u}}{\bar{u}^3K_T(\bar{u})},$$

то имеем

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{1}{2c'\cos^2\theta_0}[J(\bar{u}) - J(v_0)]. \tag{3.5.6}$$

Интегрируя третье равенство системы (3.5.3) с учетом зависимостей (3.5.4) и (3.5.6), получим

$$y = \gamma_0 x - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\int_0^x J(\bar{u})\, dx - J(v_0)\, x \right] =$$

$$= \gamma_0 x - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[-\frac{1}{c'} \int_{v_0}^{\bar{u}} \frac{J(\bar{u})\, d\bar{u}}{\bar{u} K_T(\bar{u})} - J(v_0)\, x \right].$$

Обозначим

$$A(\bar{u}) = -\int_{2000}^{\bar{u}} \frac{J(\bar{u})\, d\bar{u}}{\bar{u} K_T(\bar{u})},$$

тогда

$$y = \gamma_0 x - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\frac{A(\bar{u}) - A(v_0)}{c' x} - J(v_0) \right]$$

или, с учетом (3.5.5),

$$y = \gamma_0 x - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\frac{A(\bar{u}) - A(v_0)}{D(\bar{u}) - D(v_0)} - J(v_0) \right]. \qquad (3.5.7)$$

Интегрируем четвертое уравнение системы (3.5.3):

$$t = \int_{v_0}^{\bar{u}} \frac{dx}{\bar{u} \cos \theta_0} = -\frac{1}{c' \cos \theta_0} \int_{v_0}^{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^2 K_T(\bar{u})}.$$

Обозначим

$$T(\bar{u}) = -\int_{2000}^{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^2 K_T(\bar{u})},$$

тогда

$$t = \frac{1}{c' \cos \theta_0} [T(\bar{u}) - T(v_0)]. \qquad (3.5.8)$$

Функции $D(\bar{u})$, $J(\bar{u})$, $A(\bar{u})$, $T(\bar{u})$ называются основными функциями Сиаччи. В таблице значений этих основных функций применительно к закону сопротивления 1943 г. (см. табл. 1 приложения III) шаг рассчитан на получение достаточной точности при

линейном интерполировании, т. е. должен обеспечивать вычисление с точностью 25-мм логарифмической линейки. При необходимости проводить вычисления с большей точностью следует прибегать к квадратичному интерполированию. С этой целью лучше всего воспользоваться интерполирующей формулой Ньютона

$$y = y_0 + \xi \Delta y_0 + \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \Delta^2 y_0, \qquad (3.5.9)$$

где $\xi = \frac{x - x_0}{h}$;

h — шаг таблицы (равномерный);

Δy_0, $\Delta^2 y_0$ — конечные разности,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Чтобы определить функцию $y(x)$ при некотором значении аргумента, отличающегося от табличного, выписывают из таблицы три строки в окрестности заданного значения аргумента и вычисляют разности. Обычно за нулевую принимают строку, предшествующую заданному значению аргумента, а за первую и вторую — две последующие строки (табл. 5).

Вычисления по формуле Ньютона рекомендуется проводить, когда $x_0 < x < x_2$. Если заданное значение x выходит за эти границы, например, в случае нахождения функции $f(x)$ при аргументе, значение которого выходит за рамки таблицы, формула (3.5.9) становится экстраполирующей и точность ее резко падает.

Таблица 5

Запись данных для интерполирования

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	
x_2	y_2		

С помощью формулы Ньютона можно проводить и обратное интерполирование, когда по заданному значению функции $y(x)$ требуется найти величину аргумента x. Поскольку шаг функции $y(x)$ в общем случае неравномерный, то при обратном интерполировании приходится прибегать к методу последовательных приближений. Для этого на основании равенства (3.5.9) запишем:

$$\xi = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}. \qquad (3.5.10)$$

В первом приближении учитывают только первый член. Затем, подставляя его значение во второй член, уточняют величину ξ. Обычно бывает достаточно 2—3 приближений.

Для вершины траектории согласно соотношению (3.5.6) и условию $\gamma_s = 0$ имеем

$$0 = \gamma_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left] J(\bar{u}_s) - J(v_0) \right]$$

или

$$J(\bar{u}_s) = c' \sin 2\theta_0 + J(v_0). \tag{3.5.11}$$

По найденному значению $J(\bar{u}_s)$ в табл. 1 приложения III находим функции $\bar{u}_s$, $D(\bar{u}_s)$, $A(\bar{u}_s)$, $T(\bar{u}_s)$ и с помощью формул (3.5.5) — (3.5.8) вычисляем остальные параметры вершины.

Для точки падения, исходя из условия $y_c = 0$ и зависимости (3.5.7), имеем

$$0 = \gamma_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\frac{A(\bar{u}_c) - A(v_0)}{D(\bar{u}_c) - D(v_0)} - J(v_0) \right]$$

или

$$c' \sin 2\theta_0 = \frac{A(\bar{u}_c) - A(v_0)}{D(\bar{u}_c) - D(v_0)} - J(v_0). \tag{3.5.12}$$

Последнее уравнение является трансцендентным относительно $\bar{u}_c$ и решить его можно, например, методом подбора. Определив из него значение $\bar{u}_c$, по табл. 1 приложения III находим функции $D(\bar{u}_c)$, $J(\bar{u}_c)$, $A(\bar{u}_c)$, $T(\bar{u}_c)$ и с помощью формул (3.5.5)—(3.5.8) определяем остальные параметры траектории.

Такое довольно громоздкое решение уравнения (3.5.12) Сиаччи упростил, составив дополнительные таблицы. Из зависимости (3.5.5) следует, что величина

$$D(\bar{u}_c) = c'X + D(v_0)$$

является функцией двух параметров $c'X$ и v_0, следовательно, и левая часть уравнения (3.5.12) является функцией этих же параметров. Обозначив

$$\frac{A(\bar{u}_c) - A(v_0)}{D(\bar{u}_c) - D(v_0)} - J(v_0) = f_0(c'X;\ v_0),$$

получим

$$c' \sin 2\theta_0 = f_0(c'X;\ v_0), \tag{3.5.13}$$

Аналогично можно доказать, что величины

$$f_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X};\quad f_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_c}{\operatorname{tg} \theta_0};\quad f_3 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{T};$$

$$f_4 = \frac{v_0 \cos\theta_c}{\cos\theta_0}; \quad f_5 = \frac{x_s}{X}; \quad f_6 = \frac{Y}{X \operatorname{tg}\theta_0}$$

являются функциями параметров v_0 и $c'X$. Величины f_0—f_6 называются вспомогательными функциями Сиаччи. Их значения приведены в табл. 2—8 приложения III.

С помощью вспомогательных функций Сиаччи могут быть построены и промежуточные точки траектории. Действительно, определяя значение $\bar{u}$ из выражения

$$D(\bar{u}) = c'x + D(v_0) = f(c'x;\ v_0)$$

и подставляя его в формулу

$$\frac{A(\bar{u}) - A(v_0)}{D(\bar{u}) - D(v_0)} - J(v_0) = f_0(c'x;\ v_0),$$

уравнение (3.5.7) можно представить в виде

$$y = \gamma_0 x - \frac{x f_0(c'x;\ v_0)}{2c' \cos^2\theta_0}$$

или, с учетом (3.5.13),

$$y = \gamma_0 x \left[1 - \frac{f_0(c'x;\ v_0)}{f_0(c'X;\ v_0)}\right]. \qquad (3.5.14)$$

ГЛАВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ СИАЧЧИ

Рассмотрим природу коэффициента β, входящего множителем в выражение для приведенного баллистического коэффициента c'. С этой целью умножим обе части первого уравнения системы (3.5.1) на $\dfrac{dx}{\bar{u}K_T(\bar{u})\cos\theta_0}$, тогда, с учетом определения псевдоскорости, получим:

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}K_T(\bar{u})} = -c\frac{\Delta(y)}{\cos\theta_0}\frac{v}{\bar{u}}\frac{c_x\left(\dfrac{v}{a}\right)}{c_x(\bar{u})}dx.$$

Интегрируя в соответствующих пределах и учитывая определения основных функций Сиаччи, найдем:

$$D(\bar{u}) - D(v_0) = c\int_0^x \frac{\Delta(y)}{\cos\theta}\frac{c_x\left(\dfrac{v}{a}\right)}{c_x(\bar{u})}dx.$$

Сравнивая это выражение с равенством (3.5.5), заключаем, что β — величина переменная, поскольку

$$\beta = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\Delta(y)}{\cos\theta}\,\frac{c_x\left(\frac{v}{a}\right)}{c_x(\bar{u})}\,dx. \qquad (3.5.15)$$

Для практических расчетов достаточно определить величину β только для точки падения, т. е. принять постоянным значение

$$\beta = \frac{1}{X}\int_0^X \frac{\Delta(y)}{\cos\theta}\,\frac{c_x\left(\frac{v}{a}\right)}{c_x(\bar{u})}\,dx. \qquad (3.5.16)$$

Так как система (3.5.1) нелинейная, то введением постоянного значения β не полностью компенсируются ошибки в расчете остальных параметров траектории: ординаты, угла наклона касательной, времени, скорости. Для точного их определения следовало бы ввести дополнительные коэффициенты β_y, β_γ, β_t, β_v соответственно. Однако такой набор коэффициентов очень увеличил бы объем таблиц и усложнил пользование ими. Поэтому Сиаччи предложил ограничиться только одним коэффициентом, определяемым формулой (3.5.16) и компенсирующим ошибку по важнейшему элементу траектории — полной дальности. Остальные параметры вычисляются при этом с возможной ошибкой в 3—5% для углов бросания $\theta_0 \leqslant 60°$. Коэффициент $\beta = \beta_x$ называется главным коэффициентом Сиаччи (см. приложение IV).

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЗЕНИТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПО МЕТОДУ СИАЧЧИ

Для зенитных траекторий характерны большие углы бросания и использование для эффективного поражения целей лишь начального участка траектории — до тех пор, пока высота полета снаряда не достигнет 2/3 полной высоты траектории (рис. 19). На этом участке можно принять $\cos\theta \approx \cos\theta_0$. Поскольку при зенитной стрельбе $\frac{v}{a} > 2{,}5$ и $c_x\left(\frac{v}{a}\right)$ изменяется слабо, а псевдоскорость мало отличается от действительной, то $\frac{c_x\left(\frac{v}{a}\right)}{c_x(\bar{u})} \approx 1$. Считая, что $\Delta(y_ц) = \Delta(y_{ср})$, где $y_ц$ — высота цели; $y_{ср} = \frac{1}{2} y_ц$, по формуле (3.5.15) получим:

$$\beta = \frac{\Delta(y_{ср})}{\cos\theta_0}.$$

Для зенитной стрельбы при построении траектории удобнее измерять расстояние вдоль линии бросания, т. е. величиной $\xi = \frac{x}{\cos\theta_0}$. Если обозначить $c^* = c\Delta(y_{\text{ср}})$, то для зенитной стрельбы формулы (3.5.5)—(3.5.8) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{c^*}[D(\bar{u}) - D(v_0)];\\
\gamma &= \gamma_0 - \frac{1}{2c^*\cos\theta_0}[J(\bar{u}) - J(v_0)];\\
t &= \frac{1}{c^*}[T(\bar{u}) - T(v_0)];\\
y &= \xi\sin\theta_0 - \frac{\xi}{2c^*}\left[\frac{A(\bar{u}) - A(v_0)}{D(\bar{u}) - D(v_0)} - J(v_0)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.17)$$

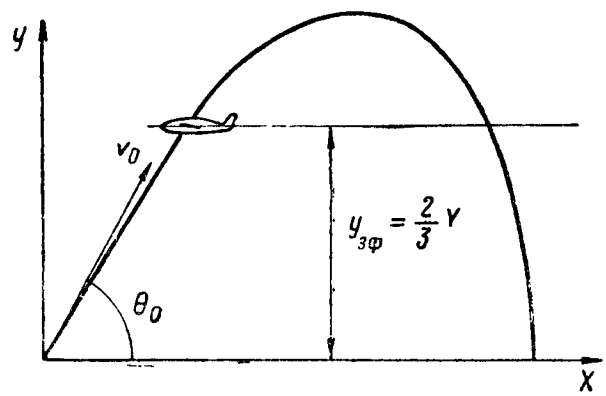


Рис. 19. К расчету зенитной траектории

Поскольку

$$\frac{A(\bar{v}) - A(v_0)}{D(\bar{u}) - D(v_0)} - J(v_0) = f_0(c^*\xi;\ v_0),$$

то четвертое уравнение системы (3.5.17) можно переписать в виде

$$y = \xi\sin\theta_0 - \frac{\xi}{2c^*} f_0(c^*\xi;\ v_0).$$

Этим выражением следует пользоваться при построении траектории.

Расчет коротких траекторий, когда скорость изменяется незначительно (на 5—10%), по формулам Сиаччи вести нецелесообразно, так как при вычитании близких величин теряется точность. В этом случае лучше пользоваться формулами разложения траектории в ряд Тейлора.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПО МЕТОДУ СИАЧЧИ

Пример 1. Определить дальность полета пули и построить траекторию по следующим данным: $d=5{,}45$ мм; $q=3{,}6$ г; $i_{43}=1{,}18$; $v_0=910$ м/с; $\theta_0=1°24'$.

Решение. Вычисляем баллистический коэффициент

$$c=\frac{id^2}{q}10^3=\frac{1{,}18(5{,}45)^2\,10^{-6}}{3{,}6\cdot10^{-3}}10^3=9{,}74\ \text{м}^2/\text{кг}.$$

Используя приложение IV, по входным параметрам c, v_0 и θ_0 определяем (экстраполированием по c): $\beta=1$, $c'=c$. Из табл. 2 приложения III находим вспомогательную функцию

$$f_0(c'X;\ v_0)=c'\sin 2\theta_0=9{,}74\cdot0{,}0488=0{,}4753.$$

По входным параметрам v_0 и $f_0(c'X,\ v_0)$ из табл. 2 приложения III двойным интерполированием (табл. 6) находим аргумент $c'X=10522$, а затем величину

$$X=\frac{c'X}{c}=\frac{10522}{9{,}74}=1080\ \text{м}.$$

Дальнейшие вычисления будем вести с помощью основных функций Сиаччи, ограничившись точностью логарифмической линейки.

Таблица 6

Определение аргумента $c'X$

$c'X$	Начальная скорость снаряда v_0, м/с		
	925	910	900
10400	0,4476	0,4626	0,4728
10522		0,4753	
10600	0,4678	0,4834	0,4937

Таблица 7

Определение основных функций

$D(\bar{u})$	$J(\bar{u})$	$A(\bar{u})$	$T(\bar{u})$	$\bar{u}$
6000	0,06757	154,16	4,445	948,4
6316	0,0750	177,40	4,790	910,0
6500	0,07923	190,80	4,990	887,6

Из табл. 1 приложения III по аргументу $\bar{u}_0=v_0=910$ м/с интерполированием (табл. 7) находим основные функции Сиаччи. Для точки падения имеем

$$D(\bar{u}_c)=c'X+D(v_0)=10522+6316=16838.$$

По этому значению, снова используя табл. 1 приложения III, интерполированием (табл. 8) находим остальные основные функции и скорость $v_c=\bar{u}_c=235{,}3$ м/с. Затем по формулам (3.5.5)—(3.5.8) вычисляем элементы точки падения:

$$\gamma_c=\gamma_0-\frac{1}{2c'\cos^2\theta_0}[J(\bar{u}_c)-J(v_0)]=$$

$$=0{,}0244-\frac{1}{2\cdot9{,}74}[1{,}6414-0{,}0750]=-0{,}056;$$

$$|\theta_c|=3°19';$$

$$T=\frac{1}{c'\cos\theta_0}[T(\bar{u}_c)-T(v_0)]=\frac{1}{9{,}74\cdot1}[31{,}8-4{,}79]=2{,}77\ \text{с}.$$

Для вершины траектории по зависимости (3.5.11) имеем

$$J(\bar{u}_s) = c' \sin 2\theta_0 + J(v_0) = 9{,}74 \cdot 0{,}0488 + 0{,}0750 = 0{,}5503.$$

По табл. 1 приложения III интерполированием (табл. 9) находим функции $D(\bar{u})$, $A(\bar{u})$.

Таблица 8

Определение основных функций в точке падения пули

$D(\bar{u})$	$J(\bar{u})$	$A(\bar{u})$	$T(\bar{u})$	$\bar{u}$
16500	1,5231	5432	30,37	241,3
16838	1,6414	5976	31,80	235,3
17000	1,6941	6237	32,48	232,4

Таблица 9

Определение функций $D(\bar{u})$ и $A(\bar{u})$

$D(\bar{u})$	$J(\bar{u})$	$A(\bar{u})$
12500	0,5157	1556,7
12689	0,5503	1666,3
13000	0,6073	1846,9

Подсчитываем элементы вершины траектории:

$$c' x_s = D(\bar{u}_s) - D(v_0) = 12689 - 6316 = 6373;$$

$$x_s = 654 \text{ м}.$$

Высоту вершины траектории найдем по формуле (3.5.7):

$$Y = 654\left[0{,}0244 - \frac{1}{2 \cdot 9{,}74}\left(\frac{1666{,}3 - 177{,}4}{6373} - 0{,}0750\right)\right] = 10{,}7 \text{ м}.$$

Несколько промежуточных точек траектории определим по формуле (3.5.14). По результатам расчетов (табл. 10) можно построить график траектории.

Таблица 10

Расчет промежуточных точек траектории

$c'X$	$f_0(c'x, v_0)$			Элементы траектории, м	
	Начальная скорость v_0, м/с			x	y
	925	900	910		
2000	0,02771	0,02933	0,02868	205	4,7
4000	0,06926	0,07358	0,07185	410	8,5
8000	0,24690	0,26310	0,25660	820	9,2
9400	0,35490	0,37630	0,36890	965	5,3

Пример 2. Определить коэффициент формы пули по следующим данным: $d = 7{,}62$ мм; $q = 9{,}6$ г; $v_0 = 840$ м/с; $0_0 = 5°$; $X = 2080$ м.

Решение. По имеющимся данным вычисляем

$$f_1(c'X;\ v_0) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X} = \frac{840^2 \cdot 0{,}1736}{2080} = 58{,}89.$$

Из табл. 3 приложения III по v_0 и $f_1(c'X,\ v_0)$ интерполированием (табл. 11) находим аргумент $c'X$.

В первом приближении принимаем $\beta = 1$, $c = c'$ и подсчитываем

$$c = \frac{c'X}{X} = \frac{15072}{2080} = 7{,}25 \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Экстраполируя, из приложения IV находим $\beta = 0{,}998$.

Во втором приближении

$$c = \frac{c'X}{\beta X} = \frac{15072}{0{,}998 \cdot 2080} = 7{,}26 \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Таблица 11

Определение аргумента $c'X$

$c'X$	Начальная скорость v_0, м/с		
	850	840	800
15000	58,86	58,49	57,00
15072		58,89	
15500	61,68	61,27	59,64

Таблица 12

Определение основных функций $D(\bar{u})$ и $A(\bar{u})$

$D(\bar{u})$	$A(\bar{u})$	$\bar{u}$	$\Delta\bar{u}$	$\Delta^2\bar{u}$
10000	686,7	525,4	—43,3	2,3
10500	811,2	482,1	—41,0	
11000		441,1		
10296	760,4	500		

Считаем это значение окончательным.

Вычисляем коэффициент формы

$$i = \frac{cq}{d^2} 10^{-3} = \frac{7{,}26 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-3}}{7{,}62^2 \cdot 10^{-6}} 10^{-3} = 1{,}20.$$

Пример 3. Определить необходимую начальную скорость 14,5-мм пули, которая на расстоянии 1000 м должна иметь скорость не менее 500 м/с. Дополнительные данные: $q = 64$ г; $i_{43} = 1{,}18$.

Решение. Подсчитываем баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} 10^3 = \frac{1{,}18(14{,}5)^2 10^{-6}}{64 \cdot 10^{-3}} 10^3 = 3{,}876 \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Из табл. 1 приложения III по параметру $\bar{u} = 500$ м/с интерполированием (табл. 12) находим основные функции $D(\bar{u})$, $A(\bar{u})$.

По формуле обратного интерполирования (3.5.10) в первом приближении найдем

$$\xi_1 = \frac{\bar{u} - \bar{u}_0}{\Delta\bar{u}_0} = \frac{500 - 525{,}4}{-43{,}3} = 0{,}586.$$

Во втором приближении имеем

$$\xi = 0{,}586 - \frac{0{,}586 \cdot 0{,}414}{2} \frac{2{,}3}{43{,}3} = 0{,}580.$$

Считаем это значение окончательным.

Используя выражение (3.5.9), вычисляем

$$D(500) = D_0 + \xi h_D = 10000 + 0{,}580 \cdot 500 = 10290.$$

Функцию $A(\overline{u})$ определим линейным интерполированием, так как она потребуется для контроля необходимого для дальнейшего расчета допущения, что $\beta = 1$. Определяем

$$D(v_0) = D(\overline{u_c}) - c'X = 10290 - 3{,}876 \cdot 1000 = 6414.$$

По табл. I приложения III составляем для наших данных интерполяционную табл. 13, по которой вычисляем

$$\xi = \frac{6414 - 6000}{500} = \frac{414}{500} = 0{,}828.$$

Таблица 13

Определение начальных значений $J(\overline{u})$, $A(\overline{u})$ и $\overline{u}$

$D(\overline{u})$	$J(\overline{u})$	$A(\overline{u})$	$\overline{u}$	$\Delta\overline{u}$	$\Delta^2\overline{u}$
6000	0,06757	154,16	948,4	—60,8	2,4
6500	0,07923	190,80	887,6	—58,4	
7000			829,2		
6414	0,07723	184,94	897,3		

По формуле квадратичного интерполирования (3.5.9) имеем

$$v_0 = \overline{u_0} + \xi \Delta\overline{u_0} + \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \Delta^2\overline{u_0} =$$

$$= 948{,}4 - 0{,}828 \cdot 60{,}8 - \frac{0{,}828 \cdot 0{,}172}{2} 2{,}4 = 897{,}3 \text{ м/с}.$$

Применяя зависимость (3.5.12), подсчитываем выражение

$$c' \sin 2\theta_0 = \frac{A(\overline{u}) - A(v_0)}{c'X} - J(v_0) =$$

$$= \frac{760{,}4 - 184{,}9}{3876} - 0{,}0772 = 0{,}0712.$$

Отсюда следует, что

$$\sin 2\theta_0 = \frac{c' \sin 2\theta_0}{c'} = \frac{0{,}0712}{3{,}876} = 0{,}0184; \quad \theta_0 = 32'.$$

При таких углах действительно $\beta = 1$. Окончательно требуемая начальная скорость $v_0 = 897$ м/с.

При необходимости вычислить небольшое количество траекторий в случае отсутствия отлаженной программы для ЭВМ метод Сиаччи может с успехом применяться и в настоящее время.

3.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ПО МЕТОДУ РУНГЕ-КУТТА

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;\ y); \quad y(0) = y_0.$$

Можно свести его к интегральному

$$y = y_0 + \int_0^x f(x;\ y)\,dx. \tag{3.6.1}$$

Поскольку под знак интеграла входит неизвестная функция, непосредственное его вычисление в общем случае невозможно. Приходится применять метод последовательных приближений, например такой распространенный, как метод Рунге-Кутта.

Если известно значение y_n, то алгоритм метода Рунге-Кутта для нахождения значения y_{n+2} (продвижение на два шага) имеет вид (четыре приближения):

$$k_1 = hf(x_n;\ y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + h;\ y_n + k_1);$$

$$k_3 = hf(x_n + h;\ y_n + k_2); \qquad k_4 = hf(x_n + 2h;\ y_n + 2k_3);$$

$$y_{n+2} = y_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Оценка точности метода Рунге-Кутта крайне сложна, так как на ошибку интегрирующей формулы (в данном случае формулы Симпсона) накладывается погрешность метода последовательных приближений. На практике подбор шага, обеспечивающего требуемую точность, чаще всего осуществляют методом проб, сравнивая результаты расчета при разных величинах шага. Шаг считается выбранным правильно, если при расчете с вдвое меньшим шагом результаты совпадают в пределах заданной точности. Главным преимуществом метода Рунге-Кутта перед другими методами, основанными на интерполировании, является однообразие операций на каждом шаге интегрирования от первого до последнего. Именно это обстоятельство сделало метод Рунге-Кутта, несмотря

на его относительную громоздкость, одним из основных при решении дифференциальных уравнений и систем уравнений с помощью быстродействующих цифровых вычислительных машин.

Рассмотрим интегрирование, например, системы (2.6.2):

$$\left.\begin{aligned} u' &= -c_1\Delta(y)\,v c_x\left(\frac{v}{a}\right);\\ \gamma' &= -\frac{g}{u^2};\quad y' = \gamma;\\ t' &= \frac{1}{u};\quad v = u\sqrt{1+\gamma^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.2)$$

где $c_1 = 4{,}81\cdot 10^{-4}\,c$ (при использовании таблиц нормальной артиллерийской атмосферы $c_1 = 4{,}74\cdot 10^{-4}\,c$).

Формулы Рунге-Кутта будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{11} &= u_n + hu_n';\\ \gamma_{11} &= \gamma_n - \frac{hg}{u_n^2};\\ y_{11} &= y_n + h\gamma_n. \end{aligned}\quad\left|\quad \begin{aligned} u_n' &= -c_1\Delta(y_n)\,v_n c_x\left(\frac{v_n}{a_n}\right);\\ v_n &= u_n\sqrt{1+\gamma_n^2}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_n + hu_{11}';\\ \gamma_{12} &= \gamma_n - \frac{hg}{u_{11}^2};\\ y_{12} &= y_n + h\gamma_{11}. \end{aligned}\quad\left|\quad \begin{aligned} u_{11}' &= -c_1\Delta(y_{11})\,v_{11} c_x\left(\frac{v_{11}}{a_{11}}\right);\\ v_{11} &= u_{11}\sqrt{1+\gamma_{11}^2}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} u_{21} &= u_n + 2hu_{12}';\\ \gamma_{21} &= \gamma_n - \frac{2hg}{u_{12}^2};\\ y_{21} &= y_n + 2h\gamma_{12}. \end{aligned}\quad\left|\quad \begin{aligned} u_{12}' &= -c_1\Delta(y_{12})\,v_{12} c_x\left(\frac{v_{12}}{a_{12}}\right);\\ v_{12} &= u_{12}\sqrt{1+\gamma_{12}^2};\\ u_{21}' &= -c_1\Delta(y_2)\,v_2 c_x\left(\frac{v_2}{a_2}\right);\\ v_{21} &= u_2\sqrt{1+\gamma_2^2}. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+2} &= u_n + \frac{h}{3}(u_n' + 2u_{11}' + 2u_{12}' + u_{21}');\\ \gamma_{n+2} &= \gamma_n - \frac{hg}{3}\left(\frac{1}{u_n^2} + \frac{2}{u_{11}^2} + \frac{2}{u_{12}^2} + \frac{1}{u_{21}^2}\right);\\ y_{n+2} &= y_n + \frac{h}{3}(\gamma_n + 2\gamma_{12} + 2\gamma_{11} + \gamma_{21});\\ t_{n+2} &= t_n + \frac{h}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{2}{u_{11}} + \frac{2}{u_{12}} + \frac{1}{u_{21}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.3)$$

При выборе шага (в метрах) можно пользоваться эмпирической формулой

$$h = \frac{500 \cos \theta}{c}.$$

В диапазоне скоростей $280 \leqslant v \leqslant 390$ м/с шаг следует уменьшить вдвое. При отсутствии в программе для ЭВМ автоматического выбора шага последний лучше взять вдвое меньшим сразу.

Пример. Вычислить траекторию полета снаряда при следующих начальных данных: $v_0 = 650$ м/с; $\theta_0 = 7°$; $c = 0{,}7524$ м²/кг.

Решение. Выбираем шаг интегрирования

$$h = \frac{500 \cdot 1}{0{,}7524} = 665 \text{ м}.$$

Для удобства дальнейших расчетов назначим величину шага такой, чтобы она легко делилась на $12 : h = 720$ м.

Контроль точности (и правильности при ручном счете) можно вести по разности $|u_{n+2} - u_{(n+2)_1}|$, которая не должна превышать 2—3 единиц последнего из учитываемых знаков.

Произведем вычисления для первых двух точек, делая в каждой точке по два приближения.

Расчеты для нулевой точки:

$$c_1 = 4{,}8104 \cdot 10^{-4} c = 4{,}8104 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}7524 = 3{,}6195 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{кг};$$

$$u_n' = -c_1 \Delta(y_n) v_n c_x \left(\frac{v_n}{a_n}\right) = -3{,}6195 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0000 \cdot 650 \cdot 0{,}323 =$$

$$= -0{,}07599;$$

$$u_n = v_n \cos \theta_0 = 650 \cdot 0{,}99255 = 645{,}16 \text{ м/с};$$

$$\gamma_n = \operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} 7° = 0{,}12278.$$

Первое приближение в первой точке:

$$u_{11} = u_n + h u_n' = 645{,}16 - 720 \cdot 0{,}07599 = 590{,}45 \text{ м/с};$$

$$\gamma_{11} = \gamma_n - \frac{hg}{u_n^2} = 0{,}12278 - 720 \frac{9{,}81}{645{,}16^2} = 0{,}10581;$$

$$y_{11} = y_n + h\gamma_n = 0 + 720 \cdot 0{,}12278 = 88{,}40 \text{ м}.$$

Используя приложение I, находим:

$$a_{11} = 339{,}95 \text{ м/с}; \quad \Delta(y_{11}) = 0{,}9915;$$

$$v_{11} = u_{11} \sqrt{1 + \gamma_{11}^2} = 590{,}45 \sqrt{1 + 0{,}10581^2} = 593{,}99 \text{ м/с};$$

$$u_{11}' = -c_1 \Delta(y_{11}) v_{11} c_x \left(\frac{v_{11}}{a_{11}}\right) = -3{,}6195 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9915 \cdot 593{,}99 \cdot 0{,}337 =$$

$$= -0{,}07184.$$

По аналогичным формулам производим второе приближение для первой точки и первое приближение для второй. Окончательно параметры второй точки вычисляем по формулам (3.6.3). Результаты вычислений следующие:

$x_n = 0;$
$v_n = 650{,}00;$
$a_n = 340{,}29;$
$\Delta(y_n) = 1{,}0000;$
$v_n/a_n = 1{,}91;$
$c_x\left(\frac{v_n}{a_n}\right) = 0{,}323;$
$-u_n' = 0{,}07599;$
$u_n = 645{,}16;$
$-hu_n' = 54{,}71;$
$x_1 = 720;$
$u_{11} = 590{,}45;$
$\gamma_n = 0{,}12278;$
$-gh/u_n^2 = 0{,}01697;$
$\gamma_{11} = 0{,}10581;$
$h\gamma_n = 88{,}40;$
$y_n = 0;$
$y_{11} = 88{,}40;$
$a_{11} = 339{,}95;$
$v_{11} = 593{,}99,$
$v_{11}/a_{11} = 1{,}75;$
$\Delta(y_{11}) = 0{,}9915;$
$c_x\left(\frac{v_{11}}{a_{11}}\right) = 0{,}337;$
$-u_{11}' = 0{,}07184;$
$u_n = 645{,}16;$
$-hu_{11}' = 51{,}72;$
$u_{12} = 593{,}44;$
$\gamma_n = 0{,}12278;$
$-gh/u_{11}^2 = 0{,}02026;$
$\gamma_{12} = 0{,}10252;$
$y_n = 0;$
$h\gamma_{11} = 76{,}18;$
$y_{12} = 76{,}18;$
$a_{12} = 339{,}91;$
$v_{12} = 596{,}41;$
$v_{12}/a_{12} = 1{,}75;$
$\Delta(y_{12}) = 0{,}9927;$
$c_x(v_{12}/a_{12}) = 0{,}337;$
$-u_{12}' = 0{,}07222;$
$u_n = 645{,}16;$
$2hu_{12}' = 103{,}99;$
$x_2 = 1440;$
$u_{21} = 541{,}17;$
$\gamma_n = 0{,}12278;$
$-2gh/u_{12}^2 = 0{,}04011;$
$\gamma_{21} = 0{,}08267;$
$y_n = 0$
$2h\gamma_{12} = 147{,}63;$
$y_{21} = 147{,}63;$
$a_{21} = 339{,}73;$
$v_{21} = 542{,}79;$
$v_{21}/a_{21} = 1{,}60;$
$\Delta(y_{21}) = 0{,}9859;$
$c_x\left(\frac{v_{21}}{a_{21}}\right) = 0{,}351;$
$-u_{21}' = 0{,}06805;$
$-2u_{11}' = 0{,}14368;$
$-2u_{12}' = 0{,}14444;$
$-u_n' = 0{,}07599;$
$-\Sigma_1 = 0{,}43216;$
$u_n = 645{,}16;$
$-\frac{h}{3}\Sigma_1 = 103{,}72;$
$u_2 = 541{,}44;$
$-hg/u_{21}^2 = 0{,}02409;$
$-2gh/u_{11}^2 = 0{,}04052;$
$-2gh/u_{12}^2 = 0{,}04011;$
$-gh/u_n^2 = 0{,}01697;$
$-\Sigma_2 = 0{,}12169;$
$-\frac{1}{3}\Sigma_2 = 0{,}04056;$
$\gamma_n = 0{,}12278;$
$\gamma_2 = 0{,}08222;$
$v_2 = 543{,}05;$
$h\gamma_n = 88{,}40;$
$2h\gamma_{11} = 152{,}37;$
$2h\gamma_{12} = 147{,}63;$
$h\gamma_{21} = 59{,}20;$
$\Sigma_3 = 447{,}60;$
$\frac{1}{3}\Sigma_3 = 149{,}20;$
$y_n = 0;$
$y_2 = 149{,}20;$
$h/u_n = 1{,}116;$
$2h/u_{11} = 2{,}439;$
$2h/u_{12} = 2{,}426;$
$h/u_{21} = 1{,}330;$
$\Sigma_4 = 7{,}311;$
$t_n = 0;$
$t_2 = 2{,}437.$

Дальнейшие вычисления удобнее производить по методу Мильна, так как при ручном счете с одинаковым шагом вычислений и простом алгоритме он дает большую точность.

Результаты расчета свидетельствуют о большом количестве вычислений на каждом шаге (нужно заполнить 15 строк, 4 раза прибегать к таблицам стандартной атмосферы и функции лобового сопротивления). Это обстоятельство не позволило широко использовать метод Рунге-Кутта до появления ЭВМ.

3.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ПО МЕТОДУ МИЛЬНА

Рассмотрим модификацию метода Мильна при использовании трех узлов интерполирования. Пусть известно решение уравнения (3.6.1) по крайней мере в трех начальных точках. Тогда алгоритм метода Мильна можно записать в виде:

$$y_{n1} = y_{n-3} + \frac{3h}{4}(y_{n-3}' + 3y_{n-1}');$$

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(y_{n-2}' + 4y_{n-1}' + y_{n1}');$$

$$y_{n1}' = f(x_n,\ y_{n1}).$$

Применительно к интегрированию системы уравнений (3.6.2) вычислительные формулы для n-го столбца имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{n1} = u_{n-3} + \frac{3h}{4}(u_{n-3}' + 3u_{n-1}');\\
&\gamma_n = \gamma_{n-2} - \frac{gh}{3}\left(\frac{1}{u_{n-2}^2} + \frac{4}{u_{n-1}^2} + \frac{1}{u_{n1}^2}\right);\\
&y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(\gamma_{n-2} + 4\gamma_{n-1} + \gamma_n);\\
&t_n = t_{n-2} + \frac{h}{3}\left(\frac{1}{u_{n-2}} + \frac{4}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n1}}\right);\\
&v_n = u_{n1}\sqrt{1 + \gamma_n^2};\\
&u_n' = -c_1\Delta(y)\,v_{n1}c_x\left(\frac{v_{n1}}{a_{n1}}\right);\\
&u_n = u_{n-2} + \frac{h}{3}(u_{n-2}' + 4u_{n-1}' + u_u').
\end{aligned}\right\} \qquad (3.7.1)$$

Уточнять остальные элементы не требуется.

При методе Мильна в каждом цикле вычислений мы продвигаемся на вдвое меньшее расстояние, чем при методе Рунге-Кутта, но цикл содержит втрое меньше формул и только раз требует использования таблиц стандартной атмосферы и функций лобового сопротивления. Таким образом, применительно к задаче внешней баллистики метод Мильна оказывается приблизительно в два раза менее трудоемким метода Рунге-Кутта. Однако для его осуществления на ЦВМ потребовалось бы составление двух программ: для начала вычислений и основной.

Продолжим решение примера предыдущего параграфа по методу Мильна, для чего по данным этого примера вычислим такие промежуточные величины:

$$u_1' = \frac{1}{2}(u_{11}' + u_{12}') = -\frac{1}{2}(0{,}07184 + 0{,}07222) = -0{,}07203;$$

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{12}(5u_0' + 8u_1' - u_2') = 645{,}16 -$$

$$-\frac{720}{12}(5 \cdot 0{,}07599 + 8 \cdot 0{,}07203 - 0{,}06805) = 591{,}87 \text{ м/с};$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 - \frac{gh}{12}\left(\frac{5}{u_0^2} + \frac{8}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2}\right) = 0{,}12278 -$$

$$-\frac{9{,}81 \cdot 720}{12}\left(\frac{5}{645{,}16^2} + \frac{8}{591{,}87^2} - \frac{1}{541{,}44^2}\right) = 0{,}10428;$$

$$y_1 = \frac{h}{12}(5\gamma_0 + 8\gamma_1 - \gamma_2) =$$

$$= \frac{720}{12}(5 \cdot 0{,}12278 + 8 \cdot 0{,}10428 - 0{,}08222) = 81{,}96 \text{ м};$$

$$t_1 = \frac{h}{12}\left(\frac{5}{u_0} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) =$$

$$= \frac{720}{12}\left(\frac{5}{645{,}16} + \frac{8}{591{,}87} - \frac{1}{541{,}44}\right) = 1{,}165 \text{ с}.$$

Остальные элементы первого столбца заполним с помощью таблиц стандартной атмосферы и функции лобового сопротивления. Из данных предыдущего примера выпишем также элементы нулевого и второго столбцов. Вычисления остальных столбцов произведем по формулам (3.7.1) и результаты занесем в табл. 14.

Для определения точки падения воспользуемся интерполирующей формулой Лагранжа. Найдем полную дальность полета снаряда ($y_c = 0$), для чего выпишем из табл. 14 значения высоты y_n и дальности полета x_n для трех последних точек:

$$y_1 = 140{,}39 \text{ м}; \quad y_2 = 30{,}81 \text{ м}; \quad y_3 = -130{,}40 \text{ м};$$

$$x_1 = 5040 \text{ м}; \quad x_2 = 5760 \text{ м}; \quad x_3 = 6480 \text{ м}.$$

Далее находим

$$X_c = \frac{(y_c - y_2)((y_c - y_3)}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} x_1 + \frac{(y_c - y_1)(y_c - y_3)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} x_2 +$$

$$+ \frac{(y_c - y_1)(y_c - y_2)}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} x_3 = 5928{,}82 \text{ м}.$$

По аналогичной формуле вычисляем полное время полета, скорость и угол падения снаряда: $T = 13{,}710$ с; $v_c = 314{,}30$ м/с; $\gamma_c = -0{,}20324$.

Таблица 14

Результаты расчета

Рассчитываемые величины	Значения x_n									
	0	720	1440	2160	2880	3600	4320	5040	5760	6480
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u'_{n-3}	—	—	—	—0,07599	—0,07203	—0,06805	—0,06414	—0,06072	—0,05599	—0,04931
$3u'_{n-1}$	—	—	—	—0,20415	—0,19215	—0,18216	—0,16797	—0,14793	—0,11790	—0,08334
Σ_1	—	—	—	—0,28014	—0,26418	—0,25021	—0,23211	—0,20865	—0,17389	—0,13265
u_{n-3}	—	—	—	645,16	591,87	541,44	493,86	448,96	406,74	368,80
$\frac{3h}{4}\Sigma_1$	—	—	—	—151,28	—142,66	—135,11	—125,34	—112,67	—93,90	—71,63
u_{n1}	645,16	591,87	541,17	493,88	449,21	406,33	368,52	336,29	312,84	297,17
$gh/3\,u^2_{n-2}$	—	—	—	0,00672	0,00803	0,00965	0,01168	0,01423	0,01731	0,02079
$4\,gh/3\,u^2_{n-1}$	—	—	—	0,03212	0,03861	0,04672	0,05692	0,06924	0,08315	0,09639
$gh/3\,u^2_{n1}$	—	—	—	0,00965	0,01167	0,01426	0,01734	0,02082	0,02406	0,02667
Σ_2	—	—	—	0,04849	0,05831	0,07063	0,08594	0,10429	0,12452	0,14384
γ_{n-2}	—	—	—	0,10428	0,08222	0,05579	0,02391	—0,01484	—0,06203	—0,11913
γ_n	0,11278	0,10428	0,08222	0,05579	0,02391	—0,01484	—0,06203	—0,11913	—0,18655	—0,26297
$4\gamma_{n-1}$	—	—	—	0,32888	0,22316	0,09564	—0,05936	—0,24812	—0,47652	—0,74620
Σ_3	—	—	—	0,48895	0,32929	0,13659	—0,09748	—0,38209	—0,72510	—1,12830
$h\Sigma_3/3$	—	—	—	117,35	79,03	32,78	—23,40	—91,70	—174,02	270,79
y_{n-2}	—	—	—	81,96	149,20	199,31	228,23	232,09	204,83	140,39
y_n	0	81,96	149,20	199,31	228,23	232,09	204,83	140,39	30,81	—130,40
$h/3\,u_{n-2}$	—	—	—	0,40549	0,44326	0,48597	0,53457	0,59006	0,65076	0,71316

$4\,h/3\,u_{n-1}$	—	—	—	1,77300	1,94387	2,13826	2,36023	2,60304	2,85264	3,07131
$h/3\,u_{n1}$	—	—	—	0,48595	0,53427	0,59065	0,65112	0,71367	0,76716	0,80762
Σ_4	—	—	—	2,66444	2,92140	3,21488	3,54605	3,90677	4,27056	4,59209
t_{n-2}	—	—	—	1,165	2,437	3,829	5,358	7,044	8,904	10,951
t_n	0	1,165	2,437	3,829	5,358	7,044	8,904	10,951	13,175	15,543
$\sqrt{1+\gamma^2 n}$	—	—	—	1,002	1,000	1,000	1,001	1,007	1,017	1,034
v_n	650	—	—	494,87	449,21	406,33	368,89	338,64	318,16	307,27
a_n	340,29	—	—	339,53	339,42	334,40	339,51	339,75	340,18	—
M	1,91	—	—	1,46	1,32	1,20	1,09	1,00	0,94	—
$c_x\,(M)$	0,323	—	—	0,365	0,378	0,385	0,373	0,325	0,242	—
$\Delta(y)$	1,0000	—	—	0,9810	0,9880	0,9889	0,9902	0,9866	0,9970	—
u'_n	−0,07599	−0,07203	−0,06805	−0,06414	−0,06072	−0,05599	−0,04931	−0,03930	−0,02778	—
u'_{n-2}	—	—	—	−0,07203	−0,06805	−0,06414	−0,06072	−0,05599	−0,04931	—
$4\,u'_{n-1}$	—	—	—	−0,27220	−0,25656	−0,24288	−0,22396	−0,19724	−0,15720	—
Σ_5	—	—	—	−0,40837	−0,38533	−0,36301	−0,33399	−0,29253	−0,23429	—
$h\Sigma_5/3$	—	—	—	−98,01	−92,48	−87,12	−80,16	−70,21	−56,23	—
u_{n-2}	—	—	—	591,87	541,44	493,86	448,96	406,74	368,8	—
u_n	645,16	591,87	541,44	493,86	448,96	406,74	368,80	336,53	312,57	—

При решении задачи внешней баллистики на ЦВМ аэродинамические характеристики, обычно задаваемые в виде графиков или таблиц, вводятся в «память» машины в виде аппроксимирующих полиномов или непосредственно таблицей. Предпочтительнее способ введения табличных функций с помощью заранее составленных аппроксимирующих полиномов, так как при этом методе вместо ввода в запоминающее устройство машины больших по объему таблиц и программ для вычисления значений функций вводятся небольшие таблицы коэффициентов указанных многочленов. При этом способе весь диапазон изменения независимой переменной разбивается на несколько конечных интервалов. На каждом из них табличная функция заменяется некоторым многочленом, близким по своему виду к функции на рассматриваемом участке. Так, функцию лобового сопротивления, которая не имеет аналитического выражения и обычно задается таблично, можно заменить кусочно-гладкими функциями по интервалам изменения числа Маха M:

$$
\begin{aligned}
c_{x1} &= 0{,}301 - 0{,}011M && 3{,}06 \leqslant M \leqslant 3{,}53;\\
c_{x2} &= 0{,}29M^{-1} + 0{,}172 && 1{,}62 \leqslant M < 3{,}06;\\
c_{x3} &= 0{,}384 \sin(1{,}85M^{-1}) && 1{,}18 < M < 1{,}62;\\
c_{x4} &= 0{,}384 - 1{,}6(M - 1{,}176)^2 && 1{,}00 < M \leqslant 1{,}18;\\
c_{x5} &= 1{,}5M - 1{,}176 && 0{,}91 \leqslant M \leqslant 1{,}00;\\
c_{x6} &= 0{,}161 + 3{,}9(M - 0{,}823)^2 && 0{,}82 \leqslant M < 0{,}91;\\
c_{x7} &= 0{,}033M + 0{,}133 && 0{,}73 \leqslant M < 0{,}82;\\
c_{x8} &= 0{,}157 && M < 0{,}73.
\end{aligned}
$$

Операция условного перехода, по которой осуществляется выбор соответствующих аппроксимирующих выражений для вычисления величины функции в пределах конкретного интервала независимой переменной, включается в основную программу решения задачи.

Глава IV

ТЕОРИЯ ПОПРАВОК

4.1. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ

До сих пор мы рассматривали движение центра масс снаряда при некоторых идеальных условиях: баллистический коэффициент и начальная скорость считались номинальными, окружающая среда соответствовала стандартной атмосфере. В действительности при стрельбе эти условия не соблюдаются. Кроме того, при составлении уравнений движения мы допускали некоторые упрощения, в частности, не учитывали кривизну Земли, ее вращение и изменение ускорения земного тяготения по высоте и дуге меридиана. Изучение отклонений траектории от рассчитанной при идеальных условиях вследствие фиксированных изменений определяющих факторов является предметом теории поправок.

Если считать отклонения факторов α_i, определяющих положение точки падения $X(c, v_0, \gamma_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, достаточно малыми, то отклонение точки падения с точностью до величин второго порядка малости можно представить в виде

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c}\delta c + \frac{\partial X}{\partial v_0}\delta v_0 + \frac{\partial X}{\partial \gamma_0}\delta \gamma_0 + \ldots + \frac{\partial X}{\partial \alpha_i}\delta \alpha_i + \ldots$$

Величину $\frac{\partial X}{\partial \alpha_i}$ называют поправочным коэффициентом на изменение фактора α_i.

Для неуправляемых снарядов постоянной массы существуют три группы поправок: на изменение начальных параметров траектории, на изменение метеорологических условий и на неучтенные в уравнениях движения непостоянство сил земного тяготения, кривизну и вращение Земли.

В некоторых случаях отклонения начальных параметров траектории могут быть учтены при производстве каждого выстрела. Например, могут вводиться поправки на скорость v_0 по отклонению температуры заряда от номинальной, в артиллерии крупных

калибров отличие массы снаряда от чертежной может учитываться поправками на баллистический коэффициент и начальную скорость. Влияние других факторов (например, разброса массы пуль, колебания дульной части ствола) оценивается в целом по группе выстрелов после анализа характеристик рассеивания точек попадания.

Поправки на изменение метеорологических условий имеют важное значение для всех видов ствольного оружия, рассчитываемого на стрельбу при любой погоде.

Поправки на непостоянство по величине и направлению силы земного тяготения и на ускорение Кориолиса имеют значение при больших дальностях, и их можно не учитывать при расчете траекторий снарядов автоматического оружия.

Вычислить поправочные коэффициенты можно следующими способами: 1) табличными методами; 2) путем использования законов подобия траекторий; 3) составлением и решением линеаризованных уравнений для малых отклонений параметров траектории от рассчитанной при идеальных условиях; 4) непосредственным дифференцированием приближенных уравнений траектории. Такое разделение методов достаточно условно. Например, вычисление поправочных коэффициентов с помощью таблиц Сиаччи относится к табличным методам, однако сам аналитический метод Сиаччи представляет траекторию лишь приближенно. При использовании законов подобия применяются некоторые зависимости параболической теории.

4.2. ТАБЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОПРАВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

При наличии баллистического сборника, определяющего основные данные траектории в функции начальных параметров c, v_0 и θ_0, вычисление поправочных коэффициентов на эти параметры сводится к численному дифференцированию функции $X(c, v_0, \theta_0)$ по одному из аргументов:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial c} &= \frac{X_{c+h} - X_{c-h}}{2h_c}; \\ \frac{\partial X}{\partial v_0} &= \frac{X_{v+h} - X_{v-h}}{2h_v}; \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_0} &= \frac{X_{\theta+h} - X_{\theta-h}}{2h_\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.1)$$

Так как баллистические таблицы составлены по трем входным параметрам c, v_0 и θ_0, то при дифференцировании приходится вычислять производные от функции $X(c, v_0, \theta_0)$ при ближайших табличных значениях аргументов, а затем проводить тройное интерполирование. Для вычисления поправочных коэффициентов на

начальные параметры можно воспользоваться и любыми другими баллистическими таблицами, например, таблицами к методу Сиаччи или Эйлера.

Для примера используем нулевую вспомогательную функцию Сиаччи

$$f_0(c'X;\ v_0) = c' \sin 2\theta_0.$$

При дифференцировании будем считать главный коэффициент Сиаччи β постоянным, так как при небольших изменениях начальных параметров он меняется незначительно. Дифференцируя обе части выражения по баллистическому коэффициенту c, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial (c'X)}\left[\beta X + c' \frac{\partial X}{\partial c}\right] = \beta \sin 2\theta_0,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \frac{1}{c}\left[\sin 2\theta_0 \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} - X\right]. \qquad (4.2.2)$$

Аналогично вычисляем по аргументу v_0:

$$\frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} c' \frac{\partial X}{\partial v_0} + \frac{\partial f_0}{\partial v_0} = 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = -\frac{1}{c'} \frac{\partial f_0}{\partial v_0} \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)}, \qquad (4.2.3)$$

а затем и по углу θ_0:

$$\frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} c' \frac{\partial X}{\partial \theta_0} = 2c' \cos 2\theta_0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = 2 \cos 2\theta_0 \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)}. \qquad (4.2.4)$$

Таким образом, для определения поправочных коэффициентов на начальные параметры достаточно вычислить производные $\partial f_0/\partial(c'X)$ и $\partial f_0/\partial v_0$ и воспользоваться формулами (4.2.2)—(4.2.4).

Пример. Определить поправочные коэффициенты на начальные параметры по следующим данным: $d=100$ мм; $q=15{,}6$ кг; $i_{43}=0{,}980$; $v_0=940$ м/с; $\theta_0=32°$; $X=20595$ м.

Решение. Подсчитываем баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} 1000 = \frac{0{,}980 \cdot 0{,}1^2}{15{,}6} 1000 = 0{,}628 \text{ м}^2/\text{кг}.$$

По значениям c, v_0 и θ_0 находим главный коэффициент Сиаччи $\beta=0{,}832$. Вычисляем приведенный баллистический коэффициент

$$c' = \beta c = 0{,}832 \cdot 0{,}628 = 0{,}523 \text{ м}^2/\text{кг},$$

а затем и величину $c'X=10765$ м^3/кг.

Из табл. 2 приложения III выписываем необходимые значения функции $f_c = c' \sin 2\theta_0$ (табл. 15).

Таблица 15

Выдержка из табл. 2 приложения III

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с			
	975	950	925	900
10400	0,4017	0,4239	0,4476	0,4728
10600	0,4209	0,4433	0,4678	0,4937
10800	0,4395	0,4633	0,4885	0,5152
11000	0,4592	0,4838	0,5098	0,5374

По формулам, аналогичным (4.2.1), вычисляем частные производные $\partial f_0/\partial(c'X)$ и $\partial f_0/\partial v_0$ при табличных значениях аргументов с последующим интерполированием. Результаты вычислений сводим в табл. 16 и 17.

Таблица 16

Значения производной $-\dfrac{\partial f_0}{\partial v_0}$ 10^3

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с		
	950	940	925
10600	0,950	0,973	1,008
10765		0,988	
10800	0,980	1,003	1,038

Таблица 17

Значения производной $\dfrac{\partial f_0}{\partial (c'X)}$ 10^4

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с		
	950	940	925
10600	0,975	0,994	1,022
10765		1,021	
10800	1,012	1,027	1,050

По значениям

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_0} = -0{,}988 \cdot 10^{-3} \text{ и } \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} = 1{,}021 \cdot 10^{-4}$$

находим поправочные коэффициенты:

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \frac{1}{c}\left[\sin 2\theta_0 \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} - X\right] =$$

$$= \frac{1}{0{,}628}\left(\frac{0{,}899}{1{,}021} 10^4 - 20595\right) = -18770 \text{ кг/м};$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial f_0}{\partial v_0} \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} = \frac{1}{0{,}523}\frac{0{,}988 \cdot 10^{-3}}{1{,}021 \cdot 10^{-4}} = 18{,}7 \text{ м/м с};$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = 2\cos 2\theta_0 \Big/ \frac{\partial f_0}{\partial (c'X)} = \frac{2 \cdot 0{,}438}{1{,}021 \cdot 10^{-4}} = 8560 \text{ м/рад}.$$

Формулы, аналогичные (4.2.2)—(4.2.4), можно построить и для основных функций Сиаччи, а также для таблиц Отто — Сиаччи.

Баллистические сборники содержат таблицы поправочных коэффициентов на изменения баллистического коэффициента, начальной скорости, угла бросания, массы снаряда, температуры и давления у поверхности Земли, бокового и продольного ветра.

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОЧНОГО КОЭФФИЦИЕНТА НА ИЗМЕНЕНИЕ МАССЫ СНАРЯДА

Изменение массы снаряда влияет на начальные параметры траектории двояко: изменяются баллистический коэффициент и начальная скорость снаряда.

Из выражения для баллистического коэффициента

$$c = \frac{id^2}{q} 1000,$$

рассматривая только изменение массы снаряда, получим:

$$\frac{\delta c}{c} = -\frac{\delta q}{q}; \quad \frac{\partial c}{\partial q} = -\frac{c}{q}.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial q} = -\frac{\partial X}{\partial c}\frac{c}{q}.$$

Учитывая отрицательное значение производной $\frac{\partial X}{\partial c}$, окончательно можем записать

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \left|\frac{\partial X}{\partial c}\right|\frac{c}{q}.$$

Этой формулой можно пользоваться только в том случае, если изменение массы снаряда не меняет его начальной скорости. Этого можно достигнуть, если в заряд более тяжелого снаряда добавлять порох. Для абсолютного большинства стрельб такое мероприятие невозможно, поэтому при изменении массы снаряда меняется и начальная скорость. Внутренняя баллистика дает следующее соотношение между приращениями массы снаряда и начальной скорости:

$$\frac{\delta v_0}{v_0} = -(0{,}35 \div 0{,}40)\frac{\delta q}{q}.$$

Точное значение коэффициента при $\frac{\delta q}{q}$ находится из таблиц.

Окончательно для поправочного коэффициента на изменение массы снаряда получим

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{1}{q}\left[c\left|\frac{\partial X}{\partial c}\right| - (0{,}35 \div 0{,}40)\,\frac{\partial X}{\partial v_0}\,v_0\right].$$

Пример. Вычислим поправку на дальность при изменении массы снаряда на 0,2 кг для данных предыдущего примера.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{1}{15{,}6}(0{,}628 \cdot 18770 - 0{,}4 \cdot 18{,}7 \cdot 940) = 305 \text{ м/кг};$$

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial q}\,\delta q = 305 \cdot 0{,}2 = 61 \text{ м}.$$

В данном случае поправка получилась положительной. Однако так бывает только при больших начальных скоростях, когда силы сопротивления воздуха движению снаряда велики. При малых скоростях преобладает второй член, отражающий изменение начальной скорости. Для артиллерии средних калибров при начальных скоростях 700—800 м/с оба члена компенсируют друг друга и изменение массы мало сказывается на изменении дальности. С уменьшением калибра такое равновесие наступает при меньших скоростях.

4.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

При малых начальных скоростях снаряда для определения поправочных коэффициентов можно воспользоваться выражением для дальности, полученным в параболической теории:

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}.$$

Полный дифференциал от этого выражения по аргументам v_0 и θ_0 имеет вид

$$\frac{dX}{X} = 2\,\frac{dv_0}{v_0} + 2\operatorname{ctg} 2\theta_0 d\theta_0.$$

Отсюда частные производные:

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \frac{2X}{v_0}; \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_0} = 2X \operatorname{ctg} 2\theta_0.$$

Расчеты по этим формулам дают удовлетворительные результаты лишь при малых скоростях и баллистических коэффициентах. Ошибки в определении поправочных коэффициентов менее 5% получаются при $cv_0^2 < 12000$ $\left(\frac{j_0}{g} < 0{,}1\right.$, где j_0 — ускорение силы сопротивления воздуха в точке вылета$\left.\right)$.

Более широкое применение на практике могут иметь формулы, полученные путем разложения решения в ряд Тейлора, при вычислении поправок на сравнительно малых дальностях. В этом случае более важное значение, чем поправка на полную дальность, имеет вертикальное отклонение точки попадания при фиксированной дальности.

Определим отклонение точек попадания по вертикали при изменении начальных параметров c, v_0 и θ_0, когда известна и фиксирована полная дальность X до цели. С учетом постоянства дальности X и равенства $\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c}$ частные производные от первого уравнения (3.2.4), справедливого для малых дальностей, по начальным параметрам будут иметь вид:

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -4{,}8104 \cdot 10^{-4} c_x \left(\frac{v_0}{a}\right) \frac{gX^3}{3v_0^2} = -\frac{gbX^3}{3cv_0^2}; \qquad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{gX^2}{v_0^3}\left[1 + \frac{bX}{3}\left(2 - \frac{v_0}{c_x\left(\frac{v_0}{a}\right)} \frac{\partial c_x\left(\frac{v_0}{a}\right)}{\partial v_0}\right)\right]; \qquad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_0} = \frac{X}{\cos^2 \theta_0} \approx X. \qquad (4.4.3)$$

В последней формуле учтено, что рассматривается только настильная стрельба и $\cos\theta_0 \approx 1$. Рассмотрим на примере стрельбы из снайперской винтовки величину вертикальных отклонений траектории при малых изменениях начальных параметров.

Пример: Дано: $d = 7{,}62$ мм; $q = 9{,}6$ г; $i_{43} = 1{,}24$; $v_0 = 860$ м/с; $X = 1000$ м. Найти отклонение по вертикали при изменениях баллистического коэффициента и скорости на 1%, а угла вылета на 1'.

Решение. По приложению II находим $c_x\left(\frac{v_0}{a}\right) = c_x\left(\frac{860}{340}\right) = 0{,}287$.

Далее вычисляем величину

$$b = 0{,}48104 \frac{id^2}{q} c_x\left(\frac{v_0}{a}\right) = 0{,}48104 \frac{1{,}24\,(0{,}00762)^2}{0{,}0096} 0{,}287 = 1{,}03 \cdot 10^{-3}.$$

Поправку на баллистический коэффициент при изменении его на 1% подсчитаем по выражению

$$\delta y_c = \frac{\partial y}{\partial c}\delta c = -\frac{gbX^3}{3v_0^2}\frac{\delta c}{c} = -\frac{9{,}81 \cdot 1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 10^9}{3 \cdot 860^2} 0{,}01 = -0{,}046 \text{ м}.$$

Для вычисления поправки на начальную скорость определим значение $\frac{\partial c_x}{\partial v_0}$.

С этой целью используем формулу $\frac{\partial c_x}{\partial v_0} = \frac{\partial c_x}{\partial M}\frac{1}{a_0}$, где $a_0 = 340$ м/с. Из приложения II для ближайших к $v_0 = 860$ м/с значений M (2,5 и 2,6) находим

$$\frac{\partial c_x}{\partial v_0} = \frac{0{,}283 - 0{,}287}{0{,}1 \cdot 340} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

По формуле (4.4.2) вычисляем производную

$$\frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{gX^2}{v_0^3}\left[1 + \frac{bX}{3}\left(2 - \frac{v_0}{c_x}\frac{\partial c_x}{\partial v_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{9{,}81 \cdot 10^6}{860^3}\left[1 + \frac{1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{3}\left(2 + \frac{860}{0{,}287}1{,}5 \cdot 10^{-4}\right)\right] = 0{,}0284 \text{ м/м/с.}$$

а затем поправку

$$\delta y_{v_0} = \frac{\partial y}{\partial v_0}\delta v_0 = 0{,}0284 \cdot 860 \cdot 0{,}01 = 0{,}244 \text{ м.}$$

Поправка на изменение угла θ_0 имеет величину

$$\delta y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta_0}\delta\theta_0 = X\delta\theta_0 = 0{,}000291 \cdot 10^3 = 0{,}291 \text{ м,}$$

где

$$\delta\theta_0 = 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}000291 \text{ рад.}$$

Для целевой стрельбы такие отклонения от расчетной точки прицеливания существенны.

Поправки на угол θ_0, скорость v_0 и коэффициент c пропорциональны X, X^2 и X^3 соответственно, поэтому при меньших дальностях (150—300 м) первостепенное значение имеет поправка на угол прицеливания, на втором месте — поправка на изменение скорости и на третьем — поправка на баллистический коэффициент.

4.5. ПОПРАВКА НА УГОЛ МЕСТА ЦЕЛИ

В реальных условиях цель часто не расположена в плоскости горизонта, а отстоит от него на некотором расстоянии $y_ц$ (рис. 20), которое может быть как положительным, так и отрицательным. Линия цели OM в этом случае образует с плоскостью горизонта угол места цели ε. Выясним, как должен меняться угол прицеливания α (угол между линией цели и линией бросания) при изменении угла места цели.

На основании формулы (4.4.3) можем заключить, что при малых углах ε угол α не должен изменяться. Но стрельбу, например зенитную, приходится вести при любых углах бросания. Для вычисления соответствующей поправки разложим уравнение тра-

ктории в ряд Тейлора, ограничившись двумя первыми членами:

$$y = \gamma_0 x - \frac{g x^2}{2 v^2{}_0 \cos^2 \theta_0}. \qquad (4.5.1)$$

Для точки встречи траектории с целью имеем: $x = D\cos\varepsilon$; $y = D\sin\varepsilon$, где D — наклонное расстояние до цели. Кроме того, $\theta_0 = \alpha + \varepsilon$. Подставляя эти значения в выражение (4.5.1), после сокращения получим

$$\sin\varepsilon = \operatorname{tg}(\varepsilon + \alpha)\cos\varepsilon - \frac{gD\cos^2\varepsilon}{2v_0^2\cos^2(\varepsilon+\alpha)},$$

откуда

$$\frac{gD}{v_0^2}\cos^2\varepsilon = 2\cos(\varepsilon+\alpha) \times$$

$$\times [\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\alpha) - \sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\alpha)] =$$

$$= 2\cos(\varepsilon+\alpha)\sin\alpha = \sin(\varepsilon+2\alpha) -$$

$$- \sin\varepsilon. \qquad (4.5.2)$$

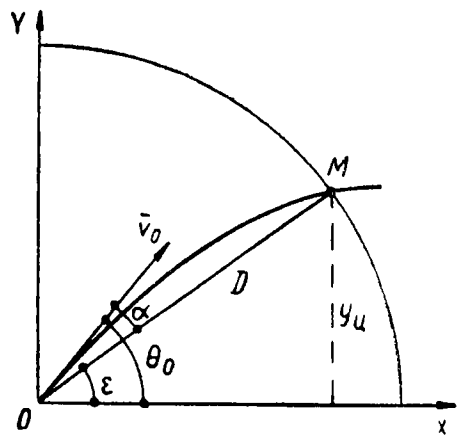


Рис. 20. К определению углов места цели и прицеливания

При $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_0$ и $D = X$ имеем

$$\frac{gX}{v_0^2} = \sin 2\alpha_0 \qquad (4.5.3)$$

Исключим величину $\frac{gX}{v_0^2} = \frac{gD}{v_0^2}$ из уравнений (4.5.2) и (4.5.3):

$$\sin(\varepsilon+2\alpha) = \sin 2\alpha_0\cos^2\varepsilon + \sin\varepsilon. \qquad (4.5.4)$$

Это выражение известно под названием формулы Лендера.

Для дальностей стрельбы из автоматического оружия угол прицеливания является достаточно малым, поэтому можно считать, что $\cos 2\alpha = \cos\alpha_0 = 1$. Перепишем зависимость (4.5.4) в виде

$$\sin\varepsilon\cos 2\alpha + 2\cos\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\cos^2\varepsilon + \sin\varepsilon$$

или

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0\cos\varepsilon. \qquad (4.5.5)$$

Несмотря на то, что формулы (4.5.4) и (4.5.5) получены при использовании только двух членов разложения в ряд Тейлора, они оказываются достаточно точными в пределах дальности стрельбы из автоматического оружия.

4.6. ЗАКОН ПОДОБИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Этот закон позволяет установить зависимость между элементами двух траекторий, отвечающих различным значениям температуры и давления в точке вылета.

Выпишем уравнения движения снаряда по координате x с учетом того, что в общем случае $\rho_0 \neq \rho_{0c}$ и ускорение силы сопротивления воздуха выражается формулой (1.7.2):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = -c_1 \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \Delta(y)\, v c_x\left(\frac{v}{a}\right); \\ &\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{g}{u^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \gamma; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.1}$$

Все величины, которые могут зависеть от изменившихся значений давления и температуры воздуха, входят в правую часть первого уравнения $\left(\frac{\rho_0}{\rho_{0c}}, \Delta(y), a\right)$. Нужно выбрать такие переменные, при которых уравнения движения оставались бы неизменными при колебаниях названных атмосферных условий. Прежде всего трансцендентная функция $c_x\left(\frac{v}{a}\right)$ должна быть функцией одной переменной. С этой целью запишем $v = \tau v_т$ и введем новую переменную $\tau^2 = \frac{T}{T_{0c}}$. Тогда имеем

$$\frac{v}{a} = \frac{v}{a_{0c}} \frac{a_{0c}}{a} = \frac{v}{a_{0c}} \sqrt{\frac{T_{0c}}{T}} = \frac{1}{\tau} \frac{v}{a_{0c}} = \frac{v_т}{a_{0c}}.$$

И, следовательно, $c_x\left(\frac{v}{a}\right) = c_x(v_т)$. Далее согласно Ланжевену введем еще переменные:

$$dx = \tau^2 d\xi; \quad dy = \tau^2 d\eta; \quad dt = \tau d\sigma.$$

Поскольку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma \text{ и } \theta_т = \theta,$$

то, очевидно,

$$u = v\cos\theta = \tau v_т \cos\theta = \tau u_т.$$

Подставив значения новых переменных в систему (4.6.1), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(\tau u_т)}{\tau d\xi} = -c_1 \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} \Delta(y)\,\tau^2 v_т c_x(v_т); \\ &\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{g}{u_т^2}; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma; \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{1}{u_т}. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.2}$$

Три последних уравнения этой системы содержат только новые переменные $u_т$, σ, ξ, η, в то время как в первом сохранилась переменная y под знаком функции $\Delta(y)$ и появилась новая переменная τ, которая также является функцией высоты траектории y.

Для левой части первого уравнения системы (4.6.2) можем написать

$$\frac{1}{\tau}\frac{d(\tau u_т)}{d\xi} = \frac{du_т}{d\xi} + u_т \frac{d}{d\xi}\ln\tau.$$

Далее имеем

$$\frac{d}{d\xi}\ln\tau = \frac{d}{d\xi}\ln\sqrt{\frac{T}{T_{oc}}} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\ln T = \frac{1}{2T}\frac{dT}{d\xi} = \frac{\gamma}{2T_{oc}}\frac{dT}{dy}.$$

Но величина $\frac{dT}{dy} = \alpha$ согласно стандартной атмосфере в каждом слое постоянна по высоте. Таким образом, справедлива запись

$$\frac{1}{\tau}\frac{d(\tau u_т)}{d\xi} = \frac{du_т}{d\xi} + \frac{\alpha u_т \gamma}{2T_{oc}}.$$

Рассмотрим множители правой части первого уравнения системы (4.6.2), зависящие от высоты траектории y:

$$\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\Delta(y)\tau^2 = \frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{T}{T_{oc}} = \frac{p}{p_{oc}} = \frac{p_0}{p_{oc}}\frac{p}{p_0}.$$

Согласно барометрической формуле (1.3.3)

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\int_0^y \frac{dy}{RT}\right) = \exp\left(-\int_0^\eta \frac{d\eta}{RT_{oc}}\right) = f(\eta). \tag{4.6.3}$$

Обозначив еще $c^* = c_1\frac{p_0}{p_{oc}}$, получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_т}{d\xi} = -c^* f(\eta) v_т c_x(v_т) - \frac{\alpha u_т \gamma}{2T_{oc}}; \\ &\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{g}{u_т^2}; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma; \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{1}{u_т}. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.4}$$

Эта система уравнений полностью определяет переменные $v_т$, γ, η, σ по независимой величине ξ при следующих начальных данных ($\xi=0$):

$$v_{то}=v_0\sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}};\qquad c^*=c_1\frac{p_0}{p_{ос}};\quad \gamma=\gamma_0.$$

Для траекторий, у которых эти начальные данные одинаковые, параметры в переменных Ланжевена совпадают.

Из подстановки Ланжевена $dx=\tau^2 d\xi$ имеем

$$x=\int_0^{\xi}\tau^2 d\xi=\int_0^{\xi}\frac{T}{T_{ос}}d\xi=\frac{T_0}{T_{ос}}\int_0^{\xi}\frac{T}{T_0}d\xi.$$

Но в соответствии с формулой (1.4.2) для тропосферы и с учетом выражения (4.6.3) можем написать

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\alpha R}=[f(\eta)]^{-\alpha R}=f_1(\eta),$$

следовательно,

$$x=\frac{T_0}{T_{ос}}\int_0^{\xi}f_1(\eta)\,d\xi. \tag{4.6.5}$$

Если система (4.6.4) проинтегрирована, то величина $f_1(\eta)$ будет известной функцией от параметра ξ, и интеграл в равенстве (4.6.5) может быть вычислен. Он будет зависеть от начальных параметров c^*, $v_{то}$, γ_0, т. е. для точки падения можно записать

$$X=\frac{T_0}{T_{ос}}\Phi(c^*, v_{то}, \gamma_0).$$

Если атмосферные условия совпадают со стандартными (т. е. $T_0=T_{ос}$, $p_0=p_{ос}$), то $c^*=c_1$, $v_{то}=v_0$, $X^*=\Phi(c_1; v_0; \gamma_0)$ и, следовательно,

$$X=\frac{T_0}{T_{ос}}X^*(c^*; v_{то}; \gamma_0). \tag{4.6.6}$$

Аналогично для любой промежуточной точки на траектории можно получить:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{T_0}{T_{oc}}\, x^*(c^*; v_{to}; \gamma_0); \qquad y = \frac{T_0}{T_{oc}}\, y^*(c^*; v_{to}; \gamma_0); \\ t &= \sqrt{\frac{T_0}{T_{oc}}}\, t^*(c^*; v_{to}; \gamma_0); \qquad v = \sqrt{\frac{T_0}{T_{oc}}}\, v^*(c^*; v_{to}; \gamma_0); \\ \gamma &= \gamma^*(c^*; v_{to}; \gamma_0). \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.7)$$

На основании этих формул можно предложить такую последовательность определения параметров траектории при давлении и температуре воздуха у Земли, отличных от стандартных.

1. Вычисляем приведенные величины начальных параметров

$$c^* = 0{,}48104\, \frac{id^2}{q}\, \frac{p_0}{p_{oc}}; \qquad v_{to} = v_0 \sqrt{\frac{T_{oc}}{T_0}}.$$

2. При значениях $c_1 = c^*$, $v_0 = v_{to}$, γ_0 по программе, составленной для стандартной атмосферы, находим величины x^*, y^*, t^*, v^*.

3. По уравнениям (4.6.7) определяем параметры траектории при действительных атмосферных условиях:

$$x = \frac{T_0}{T_{oc}}\, x^*; \qquad y = \frac{T_0}{T_{oc}}\, y^*; \qquad t = \sqrt{\frac{T_0}{T_{oc}}}\, t^*; \qquad v = \sqrt{\frac{T_0}{T_{oc}}}\, v^*.$$

Таким образом, применение закона подобия Ланжевена позволяет обойтись без составления специальной программы для измененных атмосферных условий. Закон подобия Ланжевена справедлив для любых по величине отклонений давления и температуры у поверхности Земли от их стандартных величин. Для малых отклонений на основании этого закона можно получить приближенные поправочные формулы.

4.7. ПОПРАВОЧНАЯ ФОРМУЛА НА ИЗМЕНЕНИЕ БАРОМЕТРИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Пусть температура у поверхности Земли соответствует стандартной ($T_0 = T_{oc}$), а давление отлично от стандартного ($p_0 \neq p_{oc}$). Тогда согласно первому равенству (4.6.7) имеем $X = X^*(c^*)$, где $c^* = c_1 \dfrac{p_0}{p_{oc}}$.

В случае изменения только баллистического коэффициента справедлива запись

$$\Delta X = \frac{\partial X^*}{\partial c^*}\, \Delta c^* = \frac{\partial X^*}{\partial c^*}\, \frac{p_0}{p_{oc}}\, \Delta c_1, \qquad (4.7.1)$$

откуда имеем

$$\frac{\partial X}{\partial c_1} = \frac{\partial X}{\partial c^*} \frac{p_0}{p_{oc}}.$$

При изменении только барометрического давления

$$\Delta X = \frac{\partial X^*}{\partial c^*} \Delta c^* = \frac{\partial X^*}{\partial c^*} \frac{c_1}{p_{oc}} \Delta p_0. \qquad (4.7.2)$$

Исключив из уравнений (4.7.1) и (4.7.2) величину $\frac{\partial X^*}{\partial c^*}$, получим

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial c_1} \frac{c_1}{p_0} \Delta p_0.$$

Таким образом, поправку на барометрическое давление мы выразили через поправку на изменение баллистического коэффициента. Поскольку $\frac{dX}{\partial c_1}$ величина отрицательная, то поправочный коэффициент $\frac{\partial X}{\partial p_0}$ отрицателен. Действительно, при неизменной температуре, согласно закону состояния $p = g\rho RT$, с повышением давления плотность должна повышаться и сопротивление воздуха возрастает, а дальность уменьшается.

Аналогично может быть получена формула для отклонения точки попадания в вертикальной плоскости при фиксированной дальности:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial c_1} \frac{c_1}{p_0} \Delta p_0.$$

Если подставить значение поправочного коэффициента на изменение баллистического коэффициента по формуле (4.4.1), получим

$$\Delta y = -\frac{gbX^3}{3v_0^2} \frac{\Delta p_0}{p_0}.$$

Пример. Вычислить вертикальные отклонения точек попадания при стрельбе на дистанциях 150 и 1000 м в случае изменения барометрического давления с $p_{oc} = 760$ мм рт. ст. до $p_0 = 740$ мм рт. ст. для данных предыдущего примера.

Решение.

$$\Delta y = -\frac{gbX^3}{3v_0^2} \frac{\Delta p_0}{p_0} = \frac{9{,}81 \cdot 1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 20}{3 \cdot 860^2 \cdot 760} X^3 = 1{,}198 \cdot 10^{-10} X^3.$$

Далее имеем:

для дальности $X = 150$ м

$$\Delta y = 1{,}198 \cdot 10^{-10} \cdot 150^3 = 0{,}404 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 0{,}4 \text{ мм};$$

для дальности $X = 1000$ м

$$\Delta y = 1{,}198 \cdot 10^{-10} \cdot 10^9 = 0{,}1198 \text{ м}.$$

4.8. ПОПРАВОЧНАЯ ФОРМУЛА НА ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изменение температуры окружающего воздуха влияет на поправку по дальности двояко: через плотность воздуха, т. е. силу сопротивления его, и через температуру заряда, влияющую на начальную скорость снаряда. (В общем случае температура заряда $T_з$ не совпадает с температурой окружающего воздуха T_0, поскольку заряд может храниться в специальных условиях.)

Рассмотрим сначала изменение дальности вследствие изменения температуры воздуха. От температуры зависят как первый множитель правой части формулы (4.6.6), так и приведенная начальная скорость $v_{т0} = v_0 \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}}$, входящая в эту формулу под знаком функции X^*. Возьмем логарифмический дифференциал по v_0 в предположении, что $T_0 = \text{const}$:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X^{*\prime}}{X^*} \Delta v_{т0} = \frac{X^{*\prime}}{X^*} \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}} \Delta v_0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = X \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}} \frac{X^{*\prime}}{X^*}. \tag{4.8.1}$$

В случае изменения только температуры воздуха логарифмический дифференциал примет вид

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta T_0}{T_0} + \frac{X^{*\prime}}{X^*} \Delta v_{т0} = \frac{\Delta T_0}{T_0} - \frac{X^{*\prime}}{X^*} \frac{v_0}{2T_0} \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}} \Delta T_0,$$

откуда найдем

$$\frac{\partial X}{\partial T_0} = \frac{1}{T_0} \left(X - X \frac{X^{*\prime}}{X^*} \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}} \frac{v_0}{2} \right). \tag{4.8.2}$$

Исключив из выражений (4.8.1) и (4.8.2) величину $X \sqrt{\frac{T_{ос}}{T_0}} \times \frac{X^{*\prime}}{X^*}$, окончательно получим

$$\frac{\partial X}{\partial T_0} = \frac{1}{T_0} \left(X - \frac{v_0}{2} \frac{\partial X}{\partial v_0} \right).$$

Для определения значения $\frac{\partial y}{\partial T_0}$ разложим в ряд Тейлора уравнение траектории

$$y = \gamma_0 x - \frac{g x^2}{2 v_0^2} - \frac{g b x^3}{3 v_0^2}$$

и вычислим частную производную по T_0 при фиксированной дальности X:

$$\frac{\partial y}{\partial T_0} = -\frac{gX^3}{3v_0^2}\frac{\partial b}{\partial T_0}.$$

С учетом того, что $\rho_0 \neq \rho_{oc}$, можем написать

$$b = 0{,}48104\,\frac{id^2}{q}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,c_x\left(\frac{v_0}{a_0}\right).$$

Но согласно закону состояния ($p = g\rho RT$) и формуле скорости звука ($a = \sqrt{kgRT}$) при постоянном давлении имеем:

$$\frac{\rho_0}{\rho_{oc}} = \frac{T_{oc}}{T_0}; \quad \frac{v_0}{a_0} = \frac{v_0}{a_{oc}}\,\frac{a_{oc}}{a_0} = \frac{v_т}{a_{oc}}.$$

Таким образом:

$$b = 0{,}48104\,\frac{id^2}{q}\,\frac{T_{oc}}{T_0}\,c_x(v_{т0}); \quad v_{т0} = v_0\sqrt{\frac{T_{oc}}{T_0}}.$$

Тогда:

$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{\Delta T_0}{T_0} + \frac{\Delta c_x}{c_x};$$

$$\Delta c_x = \frac{\partial c_x}{\partial v_{т0}}\,\frac{dv_{т0}}{dT_0}\,\Delta T_0 = -\frac{\partial c_x}{\partial v_0}\,\frac{v_{т0}}{2}\,\frac{\Delta T_0}{T_0}.$$

Окончательно имеем (считая, что $v_{т0} \approx v_0$)

$$\frac{\partial y}{\partial T_0} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{v_0}{2c_x}\,\frac{\partial c_x}{\partial v_0}\right)\frac{gbX^3}{3v_0^2}. \qquad (4.8.3)$$

Пример. По данным примера в параграфе 4.4 определим отклонения по вертикали при изменении температуры на +10 К на дистанциях 150 и 1000 м.

Решение. Имеем: $v_0 = 860$ м/с; $T_0 = 293$ К; $\frac{\partial c_x}{\partial v_0} = -1{,}5\cdot 10^{-4}$; $c_x(v_0) = 0.287$.

Подставляя эти значения в формулу (4.8.3), найдем

$$\frac{\partial y}{\partial T_0} = \frac{1}{293}\left(1 - \frac{860\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}}{2\cdot 0{,}287}\right)\frac{9{,}81\cdot 1{,}03\cdot 10^{-3}}{3\cdot 860^2}x^3 = 0{,}12\cdot 10^{-10}x^3 \text{ м/град},$$

Далее получим:
при стрельбе на 150 м

$$\Delta y = 0{,}12\cdot 10^{-10}\cdot 150^3\cdot 10 = 0{,}405\cdot 10^{-3} \text{ м};$$

при стрельбе на 1000 м

$$\Delta y = 0{,}12\cdot 10^{-10}\cdot 10^9\cdot 10 = 0{,}12 \text{ м}.$$

Для определения поправки на скорость в случае изменения температуры порохового заряда существует эмпирическая зависимость

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = 0{,}000638\,\Delta T_з,$$

полученная для условий стрельбы из стрелкового оружия.

С учетом формулы (4.4.2) найдем

$$\Delta y = 0{,}000638\,\Delta T_з \frac{gX^2}{v_0^2}\left[1 + \frac{bX}{3}\left(2 - \frac{v_0}{c_x}\frac{\partial c_x}{\partial v_0}\right)\right].$$

Рассчитаем, например, величину вертикального смещения точки попадания при изменении температуры заряда на 10 К ($\Delta T_з = 10$ К) для данных примера параграфа 4,4: $v_0 = 860$ м/с; $c_x(v_0) = 0{,}287$; $b = 1{,}03 \cdot 10^{-3}$; $\frac{\partial c_x}{\partial v_0} = -1{,}5 \cdot 10^{-4}$; $X = 1000$ м. После подстановки получим

$$\Delta y = 0{,}000638 \cdot 10\,\frac{9{,}81 \cdot 10^6}{860^2}\left[1 + \frac{1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{3}\left(2 + \frac{860}{0{,}287}\,1{,}5 \cdot 10^{-4}\right)\right] =$$

$$= 0{,}156 \text{ м}.$$

При дальности $X_1 = 150$ м приближенно можно считать

$$\Delta y_1 = \Delta y \left(\frac{150}{1000}\right)^2 = 0{,}156 \left(\frac{150}{1000}\right)^2 = 0{,}351 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Величина поправок того же порядка, что и при изменении только температуры воздуха.

4.9. ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА НА ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ

Влажность воздуха меняется от 0 до 100%, что соответствует изменению парциального давления на 0—12,7 мм рт. ст.

Полное давление влажного воздуха согласно закону Дальтона записывается в виде

$$p = p_1 + e, \tag{4.9.1}$$

где p_1 — давление сухого воздуха,

$$p_1 = g\rho_1 RT;$$

e — парциальное давление водяных паров,

$$e = g\rho_2 R_2 T;$$

ρ_1 — плотность доли сухого воздуха;
ρ_2 — плотность водяных паров;
R_2 — газовая постоянная для водяного пара.

Общая плотность воздуха

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

Выразив плотности через давления, получим

$$\rho = \frac{1}{gRT}\left(p_1 + \frac{R}{R_2}e\right).$$

Известно такое соотношение газовых постоянных сухого воздуха и водяного пара: $\frac{R}{R_2} = \frac{5}{8}$. С учетом этого и исключая давление p_1 с помощью зависимости (4.9.1), получим

$$\rho = \frac{p}{gRT}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{e}{p}\right). \qquad (4.9.2)$$

Последний множитель мало отличается от единицы. В артиллерийской практике используют так называемую виртуальную температуру, определяемую по формуле

$$\tau = \frac{T}{1 - \frac{3}{8}\frac{e}{p}}, \qquad (4.9.3)$$

с введением которой уравнение (4.9.2) принимает вид

$$\rho = \frac{p}{gR\tau}, \qquad (4.9.4)$$

т. е. формально совпадает с законом состояния. Следовательно, виртуальная температура может быть определена как температура сухого воздуха, при которой давление и плотность совпадают с давлением и плотностью влажного воздуха.

На основании соотношения (4.9.4) можно заключить, что поправка на влажность, согласно формуле (4.9.3), может быть сведена к поправке на температуру

$$\Delta T = \frac{3}{8}\frac{e}{p}T.$$

Для 100%-ной влажности и температуры у поверхности Земли $T_{\text{ос}} = 288$ К имеем

$$\Delta T = \frac{3}{8}\frac{12{,}7}{760}288 = 1{,}8\text{К}.$$

Таким образом, даже при 100%-ной влажности виртуальная температура отличается от действительной всего на 0,6%. Учитывая данные примера, приведенного в предыдущем параграфе, можем заключить, что влажность влияет на положение точки попадания незначительно (при стрельбе из винтовки на дальность 1000 м $\Delta y \approx 0{,}032$ м при изменении влажности от 0 до 100%) и ею можно пренебречь. В нормальной артиллерийской атмосфере при-

нята 50%-ная влажность или $e=6{,}35$ мм рт. ст., виртуальная температура при этом $\tau_0=288{,}9$ К. Колебания влажности в расчетах также не учитываются.

4.10. ПОПРАВКА НА ВЕТЕР

Движение атмосферного воздуха — ветер — имеет горизонтальную и вертикальную составляющие. Однако скорость вертикального ветра, как правило, значительно меньше горизонтального, поэтому в расчетах не будем его учитывать. Первая составляющая ветра не постоянна как по горизонту, так и особенно по высоте. Переменными параметрами ветра являются его сила (скорость) и направление. Но при вычислении поправок ветер усредняют. Таким образом, пока будем считать ветер постоянным как по высоте, так и по направлению.

Ветер изменяет скорость движения снаряда относительно атмосферного воздуха и, следовательно, величину сопротивления воздуха, вызывая отклонение точки падения от рассчитанной для спокойной атмосферы. Поскольку учитывается только горизонтальная составляющая ветра, то в относительном движении изменяется также только горизонтальная составляющая скорости снаряда $u=v\cos\theta$, а вертикальная составляющая $w=v\sin\theta$ остается неизменной.

Рассмотрим движение снаряда в подвижной системе координат $O_1X_1YZ_1$ (рис. 21), перемещающейся в горизонтальной плоскости со скоростью ветра $\overline{W}$. Очевидно, относительно подвижной системы координат воздух неподвижен и траекторию снаряда в ней можно рассчитывать по программе, составленной для спокойной атмосферы, но с измененными начальными данными.

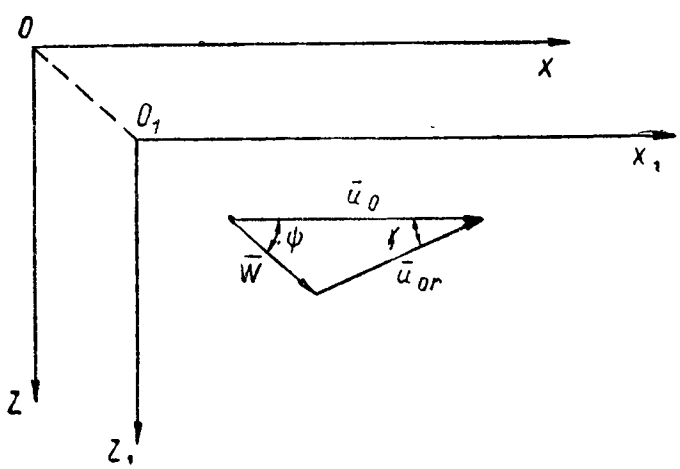


Рис. 21. К расчету движения снаряда в подвижной системе координат

Прежде всего определим начальную скорость v_{0r} в подвижной системе координат. Горизонтальную составляющую начальной скорости u_{0r} найдем из векторного равенства $\overline{u}_{0r}=\overline{u}_0-\overline{W}$:

$$u_{0r}=\sqrt{u_0^2-2Wu_0\cos\psi+W^2},$$

где ψ — угол между направлениями стрельбы OX и ветра.

Скорость ветра W по сравнению с горизонтальной составляющей u_0 настолько мала, что величинами второго порядка малости $\left(\frac{W}{u_0}\right)^2$ по сравнению с единицей можно пренебречь. Таким образом, с точностью до малых второго порядка можно написать

$$u_{0r} \approx u_0 - W \cos \psi.$$

Начальная скорость в подвижной системе координат имеет значение

$$v_{0r} = \sqrt{u_{0r}^2 + w_0^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 W \cos\psi \cos\theta_0 + W^2 \cos^2\psi} \approx$$

$$\approx v_0 \left(1 - 2\frac{W \cos\psi}{v_0} \cos\theta_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разлагая это выражение в биноминальный ряд и отбрасывая величины порядка малости выше первой, получим

$$v_{0r} \approx v_0 - W \cos\psi \cos\theta_0.$$

Таким образом, в подвижной системе координат по сравнению с неподвижной начальная скорость изменяется на величину

$$\delta v_0 = -W \cos\psi \cos\theta_0. \qquad (4.10.1)$$

Тангенс угла вылета в подвижной системе координат найдем по формуле

$$\operatorname{tg}\theta_{0r} = \frac{w_0}{u_{0r}} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0 - W\cos\psi} = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{1 - \frac{W\cos\psi}{v_0 \cos\theta_0}}.$$

Разлагая выражение $\left[1 - \frac{W\cos\psi}{v_0\cos\theta_0}\right]^{-1}$ в биноминальный ряд и отбрасывая величины второго и более высокого порядка малости, будем иметь

$$\operatorname{tg}\theta_{0r} = \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{W\cos\psi\sin\theta_0}{v_0\cos^2\theta_0}.$$

Заменяя разность тангенсов дифференциалом и переходя от дифференциала к приращению, получим

$$\frac{\delta\theta_0}{\cos^2\theta_0} = \frac{W\cos\psi\sin\theta_0}{v_0\cos^2\theta_0},$$

следовательно,

$$\delta\theta_0 = \frac{W\cos\psi\sin\theta_0}{v_0}. \qquad (4.10.2)$$

Если известна полная дальность X в неподвижной системе координат, вычисленная при начальных значениях параметров v_0 и θ_0, то дальность в подвижной системе координат X_{0r} при начальных параметрах $v_0+\delta v_0$ и $\theta_0+\delta\theta_0$ определится через поправочные коэффициенты на начальную скорость и угол бросания. С учетом выражений (4.10.1) и (4.10.2) ее можно подсчитать по формуле

$$X_{0r} = X + \frac{\partial X}{\partial v_0}\,\delta v_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0}\,\delta\theta_0 = X - \frac{\partial X}{\partial v_0}\,W\cos\psi\cos\theta_0 +$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial \theta_0}\,\frac{W\cos\psi\sin\theta_0}{v_0}\,.$$

Полная дальность с учетом действия ветра $\overline{X}_W$ равна сумме перемещений подвижной системы координат $\overline{W}T$ и относительной дальности полета снаряда в подвижной системе $\overline{X}_{0r}$:

$$\overline{X}_W = \overline{W}T + \overline{X}_{0r}, \tag{4.10.3}$$

где T — полное время полета снаряда.

Вектор $\overline{X}_{0r}$ в подвижной системе координат должен совпадать по направлению с вектором $\overline{u}_{0r}$, т. е. с осью O_1X_1 он составляет угол γ (см. рис. 21). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{W\sin\psi}{u_{0r}} = \frac{W\sin\psi}{v_0\cos\theta_0 - W\cos\psi} \approx \frac{W\sin\psi}{v_0\cos\theta_0}\,; \\ \cos\gamma &= \sqrt{1-\left(\frac{W\sin\psi}{v_0\cos\theta_0}\right)^2} \approx 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.10.4}$$

Спроектируем равенство (4.10.3) на оси неподвижной системы координат

$$X_W = TW\cos\psi + X_{0r}\cos\gamma;$$

$$Z_W = TW\sin\psi - X_{0r}\sin\gamma.$$

Обозначим через $W_x = W\cos\psi$ — составляющую скорости ветра вдоль направления стрельбы, через $W_z = W\sin\psi$ — боковую составляющую. Кроме того, во втором равенстве с точностью до малых второго порядка можно принять $X_{0r} = X$. С учетом системы (4.10.4) окончательно получим:

$$X_W = X + W_x\left(T - \frac{\partial X}{\partial v_0}\cos\theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0}\,\frac{\sin\theta_0}{v_0}\right);$$

$$Z_W = W_z\left(T - \frac{X}{v_0\cos\theta_0}\right). \tag{4.10.5}$$

Пример 1. Рассмотрим поправки на ветер $W_x = W_z = 1$ м/с для данных примера из параграфа 4.2 (дополнительно известно полное время полета $T = 61{,}2$ с).

Решение. Имеем:

$$\delta X = X_W - X = W_x \left(T - \frac{\partial X}{\partial v_0} \cos\theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \frac{\sin\theta_0}{v_0} \right) =$$

$$= 1 \left(61{,}2 - 18{,}7 \cdot 0{,}8480 + 8560 \frac{0{,}5299}{940} \right) = 50{,}2 \text{ м};$$

$$Z_W = 1 \left(61{,}2 - \frac{20595}{940 \cdot 0{,}8480} \right) = 35{,}4 \text{ м}.$$

Для настильной стрельбы формула (4.10.5) может быть преобразована к удобному для вычислений виду. Запишем

$$Z_W = W_z \left(\frac{X}{u_{ср}} - \frac{X}{u_0} \right) \approx W_z X \frac{v_0 - v_{ср}}{v_{ср} v_0} .$$

Поскольку имеем:

$$v_{ср} = v_0 - 0{,}5 b v_{ср} X; \quad b = 0{,}48104 \frac{id^2}{q} c_x \left(\frac{v_0}{a_0} \right),$$

то окончательно получим

$$Z_W = b \frac{W_z}{2v_0} X^2.$$

Пример 2. Вычислить отклонение пули снайперской винтовки под действием бокового ветра $W_z = 1$ м/с при стрельбе на 1000 м, когда известно: $b = 1{,}03 \cdot 10^{-3}$; $v_0 = 860$ м/с.

Решение.

$$Z_W = 1{,}03 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2 \cdot 860} 10^6 = 0{,}6 \text{ м}.$$

Поправка на боковой ветер даже при относительной его слабости (1 м/с) превосходит все ранее вычисленные поправки.

Поправка на боковой ветер является основной в стрелковом оружии.

Поправку на вертикальное смещение под действием продольного ветра для настильной стрельбы можно вычислить исходя из следующих соображений. Уравнения движения снаряда в случае действия продольного ветра ($\Delta(y) = 1$) имеют вид:

$$\frac{du}{dt} = -c_1 (v - W_x)^2 c_x \left(\frac{v - W}{a} \right) \cos\theta;$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos\theta}{v}; \quad \frac{dx}{dt} = v \cos\theta; \quad \frac{dy}{dt} = v \sin\theta.$$

Преобразуя эти уравнения по переменной x и пренебрегая членами с величиной $\left(\frac{W}{v}\right)^2$, малой по сравнению с единицей, получим $\left[\cos\theta=1,\ v=u,\ c_x\left(\frac{v-W}{a}\right)\approx c_x(v_0)\right]$:

$$\frac{dv}{dx}=-c_1(v-2W_x)c_x(v_0);\quad \frac{d\gamma}{dx}=-\frac{g}{v^2};\quad \frac{dy}{dx}=\gamma.$$

Разложение в ряд Тейлора приводит к виду

$$y=\gamma_0 x-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{gbx^3}{3v_{cp}^2}\left(1-2\frac{W_x}{v_{cp}}\right), \qquad (4.10.6)$$

где $b=c_1c_x(v_0)$.

Сравнивая выражение (4.10.6) с первым уравнением (3.2.4) и полагая $v_{cp}=v_0$, найдем

$$\delta y=\frac{2}{3}\frac{gbx^3}{v_0^3}W_x.$$

Например, при стрельбе из снайперской винтовки на расстояние 1000 м, когда скорость продольного ветра $W_x=1$ м/с ($v_0=860$ м/с, $b=1{,}03\cdot10^{-3}$), будем иметь

$$\delta y=\frac{2}{3}\frac{9{,}81\cdot1{,}03\cdot10^{-3}\cdot10^9}{860^3}1=0{,}0106\ \text{м}.$$

Таким образом, продольный ветер существенного влияния на результат настильной стрельбы не оказывает.

4.11. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ТАБЛИЦАХ СТРЕЛЬБЫ

Таблицы стрельбы служат для расчета установок прицела по цели. В них, наряду с основными данными, имеются сведения об оружии, снарядах, взрывателях и зарядах, а также различного рода вспомогательные таблицы для расчетов и инструкции.

Составляются таблицы стрельбы опытно-теоретическим методом. Основные зависимости между установкой прицела и дальностью получают расчетом траекторий на ЭВМ, а для уточнения проводят ограниченное число стрельб на полигоне.

Таблицы рассчитывают для нормальных метеорологических и баллистических условий стрельбы. При этом кривизна Земли и ее вращение не учитываются; ускорение силы тяжести принимается постоянным. Нормальные баллистические условия также предполагают, что начальная скорость снаряда равна табличному значению, масса снаряда — установленной чертежом, температура заряда постоянна и равна +15° С.

Таблица 18

Содержание основных таблиц стрельбы

Снаряд _____

Заряд _____

Шкала прицела

_____

Начальная скорость _____

Изменение установки взрывателя $\Delta N_{ср}$ _____

Дальность Д	Установка прицела	Высота траектории Y	Поправки											Изменение дальности при изменении угла прицеливания на 1 тыс. $\Delta X_{тыс}$	Узкая вилка ($4B_д$) В	Угол прицеливания α	Угол падения θ_c	Окончательная скорость v_c	Время полета t_c	Срединные отклонения			Дальность Д
			По направлению		По дальности			На изменение												по дальности $B_д$	по высоте $B_в$	боковые $B_б$	
			На деривацию Z	На боковой ветер скоростью 10 м/с ΔZ_w	Для дымовых снарядов $\Delta X_д$	На колпачок взрывателей $\Delta X_к$	На продольный ветер скоростью 10 м/с ΔX_w	барометрического давления на 10 мм рт. ст. $\Delta X_н$	температуры воздуха на 10°С $\Delta X_т$	начальной скорости на 1% ΔX_{v_1}	температуры заряда на 10°С $\Delta X_{тз}$	массы снаряда q на один знак ΔX_q										
м	деление	тыс.	м	тыс.	тыс.	м	м	м	м	м	м	м	м	м	тыс.	град×мин	град	м/с	с	м	м	м	м
5000	100	97	167	1	8	—26	+47	72	26	70	63	63	—3	30	4	5,49	9,5	315	11	28	4,7	1,6	5000

Корректировка точки падения по дальности и направлению производится с помощью поправочных коэффициентов, имеющихся в таблицах стрельбы.

Основные таблицы содержат три группы данных для фиксированных дальностей $Д$ (табл. 18).

Первая группа включает элементы расчетной траектории: горизонтальную дальность, высоту траектории, окончательную скорость (скорость в точке падения), время полета, углы прицеливания и падения, а также установку прицела.

Вторая группа состоит из поправок по дальности ΔX_i и направлению ΔZ_i при отклонении условий стрельбы от нормальных на 10 единиц. Поправки по направлению учитывают деривацию (боковое отклонение снаряда от плоскости бросания, связанное с вращательным движением снаряда около центра масс) и влияние бокового ветра скоростью 10 м/с.

Табличные поправки (поправочные коэффициенты) предполагают линейную зависимость между величиной вводимой поправки $\Delta Д$ и отклонением отдельного фактора от нормального значения:

$$\Delta Д = 0{,}1\Delta X_i \Delta_i,$$

где ΔX_i — табличная поправка на дальность при отклонении i-го фактора от нормального значения на 10 единиц;

Δ_i — действительная величина отклонения i-го фактора.

Третья группа данных таблиц стрельбы содержит характеристики рассеивания снарядов по дальности $B_д$, в боковом направлении $B_б$ и по высоте $B_в$.

4.12. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

При вычислении поправок на изменение температуры воздуха и на ветер мы полагаем, что отклонение температуры от стандартного закона и сила ветра являются величинами постоянными как по всем трем координатным осям, так и во времени. В действительности обе эти величины переменные, причем наиболее существенны их изменения по вертикали. В горизонтальном направлении колебания температуры и ветра менее заметны и обычно не учитываются. Изменения параметров атмосферы во времени оказывают влияние на положение траектории в пространстве. Однако они носят случайный характер, а подготовка данных об атмосфере достаточно трудоемка, поэтому приходится считать атмосферу неизменной в течение некоторого времени, начиная с момента получения сведений. Обычно это время ограничивается двумя часами. Итак, при изучении отклонений атмосферных условий от стандартных допускается, что параметры атмосферы неизменны как по горизонтальным направлениям, так и по времени. Эти допущения снижают точность вычисления траектории, однако

более точные расчеты и не имеют большого практического смысла, так как есть еще целый ряд случайных факторов (например, ветер, как правило, бывает порывистым), учесть которые невозможно.

Ветер характеризуется скоростью и направлением, причем последнее измеряется углом между направлениями на север и на ту точку горизонта, откуда дует ветер. Отсчитывают угол с севера по ходу часовой стрелки. Направлением на север обычно служит магнитный меридиан или вертикальная ось координатной сетки карты. В зависимости от этого будет измеряться магнитный азимут или дирекционный угол ветра α_W. Направление стрельбы также определяется азимутом или дирекционным углом цели $\alpha_ц$, т. е. углом между направлением на север и линией цели OX (рис. 22). Таким образом, если ветер дует точно в сторону цели, то их азимуты отличаются на 180°. Поскольку в общем случае ветер не совпадает с плоскостью стрельбы, его влияние учитывается через продольную (в направлении стрельбы) и боковую (перпендикулярную к направлению стрельбы) составляющие. Для разложения вектора скорости ветра $\overline{W}$ на составляющие находят угол ветра

$$A_W = \alpha_ц - (\alpha_W + 180°).$$

Составляющие определяются по формулам:

$$W_x = W \cos A_W; \qquad W_z = W \sin A_W.$$

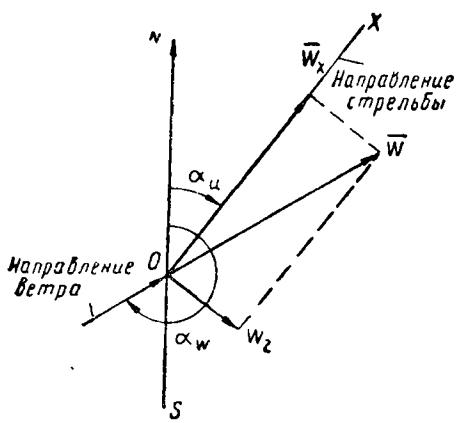


Рис. 22. К определению продольной и боковой составляющих ветра

Для учета поправок на метеорологические условия, непостоянные с высотой, вводится понятие *баллистических средних* вместо реальных (переменных с высотой), т. е. в расчетах принимают средние значения ветра и отклонений температуры от стандартного закона. Баллистический средний ветер и баллистическое среднее отклонение температуры выбираются из условия, что вызванное их действием отклонение точки падения снаряда совпадает с отклонением от реального воздействия ветра и температуры.

Для вычисления баллистических средних траекторию разбивают по высоте на ряд (обычно 5—6) слоев равной толщины. В каждом слое составляющие ветра (боковая и продольная) и отклонение температуры считают постоянными. Эти постоянные средние значения определяют либо графически либо принимают значения этих величин в середине слоя.

Если влияние некоторого i-го слоя на отклонение точки падения при составляющих скоростях ветра 1 м/с и отклонении температуры на 1 К определяется поправочными коэффициентами

$\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_i$, $\left(\frac{\partial X}{\partial W_x}\right)_i$, $\left(\frac{\partial X}{\partial W_z}\right)_i$, то для определения баллистических средних справедливы равенства:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_i \delta T_i = \frac{\partial X}{\partial T_0} \delta T_{\text{Б}};$$

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial X}{\partial W_x}\right)_i W_{xi} = \frac{\partial X}{\partial W_x} W_{x\text{Б}};$$

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial Z}{\partial W_z}\right)_i W_{zi} = \frac{\partial Z}{\partial W_z} W_{z\text{Б}}.$$

Обозначим:

$$q_{Ti} = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_i}{\frac{\partial X}{\partial T_0}}; \qquad q_{W_x i} = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial W_x}\right)_i}{\frac{\partial X}{\partial W_x}}; \qquad q_{W_z i} = \frac{\left(\frac{\partial X}{dW_z}\right)_i}{\frac{\partial X}{\partial W_z}}.$$

Тогда имеем:

$$\delta T_{\text{Б}} = \sum_1^n q_{Ti} \delta T_i; \quad W_{x\text{Б}} = \sum_1^n q_{W_x i} W_{xi}; \quad W_{z\text{Б}} = \sum_1^n q_{W_z i} W_{zi}.$$

Величины q_{Ti}, $q_{W_x i}$, $q_{W_z i}$ называются весовыми коэффициентами слоев. Они характеризуют относительное влияние слоя на отклонение точки падения. Если положить величины δT_i, W_{xi}, W_{zi} постоянными для всех слоев и равными соответствующим баллистическим средним, то получим:

$$\sum_1^n q_{Ti} = 1; \quad \sum_1^n q_{W_x i} = 1; \quad \sum_1^n q_{W_x i} = 1.$$

По этим значениям можно проверить правильность вычисления этих коэффициентов. Весовые коэффициенты являются функциями плотности слоя и времени пребывания в нем снаряда. Точное их значение можно вычислить, если рассчитать ряд траекторий при отклонении температуры на 1° и составляющих ветра скоростью 1 м/с в каждом отдельном слое. Этот метод сложен и на практике значение весовых коэффициентов рассчитывают приближенно, учитывая только относительное время пребывания снаряда в слое, которое также вычисляется приближенно на основании параболической теории.

Формулы параболической теории, определяющие полные высоту и время полета снаряда, следующие:

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}; \qquad T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

Исключив отсюда величину $v_0 \sin \theta_0$, получим

$$\frac{T^2}{Y} = \frac{8}{g}$$

или

$$T = \sqrt{\frac{8}{g} Y}. \tag{4.12.1}$$

Часть траектории над любой горизонтальной плоскостью, например над уровнем y_i (рис. 23), можем рассматривать как самостоятельную траекторию, для которой справедливо равенство (4.12.1), записанное в виде

$$T_i = \sqrt{\frac{8}{g} (Y - y_i)}. \tag{4.12.2}$$

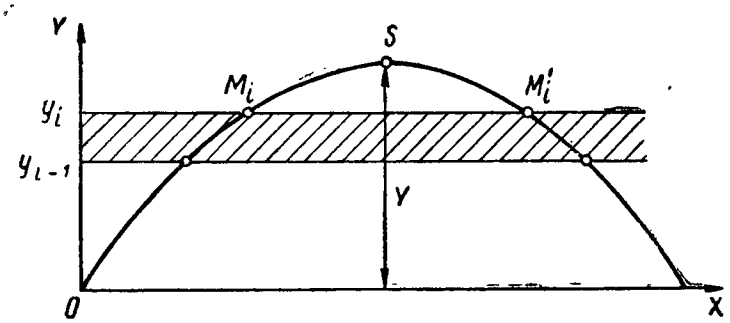


Рис. 23. К определению весового коэффициента слоя

Разделив почленно уравнение (4.12.2) на выражение (4.12.1), получим относительное время пребывания снаряда над i-м уровнем:

$$\frac{T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}}.$$

Время пребывания снаряда в слое между уровнями i и $i-1$ можно представить в такой форме:

$$\frac{T_{i-1} - T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_{i-1}}{Y}} - \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}}.$$

Поскольку траектория разбивается по высоте на n равных частей, то можно написать такие соотношения:

$$\frac{y_{i-1}}{Y} = \frac{i-1}{n}; \qquad \frac{y_i}{Y} = \frac{i}{n}.$$

Обозначая время пребывания снаряда в i-м слое через $t_i = T_{i-1} - T_i$, окончательно получим

$$q_i = \frac{t_i}{T} = \frac{\sqrt{n-i+1} - \sqrt{n-i}}{\sqrt{n}} .$$

Эта формула и принимается обычно для приближенного подсчета весового коэффициента слоя. Если для примера вычислить коэффициенты пяти последовательных слоев ($n=5$), то их значения окажутся равными 0,11; 0,12; 0,14; 0,19 и 0,44 соответственно. Наибольшую величину имеет коэффициент верхнего слоя. Однако фактическое его значение, особенно для высоких траекторий, несколько меньше, так как плотность воздуха в верхнем слое наименьшая.

4.13. ПОДГОТОВКА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Подготовка метеорологических данных в артиллерии включает в себя как определение температуры воздуха, направления и скорости ветра, а также барометрического давления у поверхности Земли, так и ветровое и температурное зондирование атмосферы.

Ветровое зондирование обычно проводят с помощью шаров-пилотов (резиновой оболочки, наполненной водородом). Скорость шара-пилота считается постоянной, что близко к действительности. Наблюдения за шаром-пилотом ведут с трех точек (третья — контрольная), фиксируя его положение через равные промежутки времени. Полученных данных вполне достаточно, чтобы вычислить скорость и направление ветра в атмосфере. Ветровое зондирование может осуществляться также с помощью радиотехнических средств, оптических приборов и ветрового ружья.

Температура в слоях атмосферы (температурное зондирование) измеряется специальными приборами (радиозондами), поднимаемыми в воздух с помощью шаров, наполненных водородом. Сущность метода заключается в том, что радиозонд, снабженный датчиком температуры, преобразует информацию в радиосигналы, которые принимаются на Земле радиолокационной станцией и расшифровываются. Принимаемые сигналы используются также для определения координат радиозонда, т. е. температурное зондирование совмещается с ветровым.

По результатам наземных наблюдений и зондирования атмосферы составляется метеорологический бюллетень, данные которого передаются в войска по каналам связи в закодированном виде, поскольку такая форма упрощает ввод информации в ЭВМ, предназначенные для расчета установок прицелов в артиллерийских подразделениях.

В артиллерии принят бюллетень, называемый «метеосредний», который содержит средние значения отклонений метеорологических элементов от стандартных в слоях атмосферы от поверхности

Земли до определенных (стандартных) высот. Таких высот в бюллетене насчитывается 20 (за первую, равную нулю, берется уровень метеорологической станции). Последняя стандартная высота всегда равна 30 км.

Бюллетень «метеосредний» (или «метео 11») содержит следующие данные:

— отклонения наземного давления атмосферы и наземной виртуальной температуры воздуха от табличных значений в районе расположения метеорологической станции;

— средние отклонения плотности и температуры воздуха от табличных значений до стандартных высот (отклонение плотности воздуха дается до высоты 10 км);

— направление и скорость среднего ветра до стандартных высот.

В артиллерийские подразделения бюллетень «метеосредний» передается по такой форме:

«Метео — 11NN — ДДЧЧМ — ВВВВ — БББT_0T_0 — 02ПП — ТТННСС — 04ПП — ТТННСС — 08ПП — ТТННСС — 12ПП — ТТННСС — 16ПП — ТТННСС — 20ПП — ТТННСС — 24ПП — ТТННСС — 30ПП — ТТННСС — 40ПП — ТТННСС — 50ПП — ТТННСС — 60ПП — ТТННСС — 80ПП — ТТННСС — 10ПП — ТТННСС — 12 — ТТННСС — 14 — ТТННСС — 18 — ТТННСС — 22 — ТТННСС — 26 — ТТННСС — 30 — ТТННСС — $B_тB_тB_вB_в$».

Входящие в эту условную запись цифры и буквы имеют следующие значения:

Метео-11 — условное обозначение бюллетеня «метеосредний»;

NN — условный номер метеорологической станции (от 00 до 99);

ДД — день (число) месяца составления бюллетеня;

ЧЧМ — часы (ЧЧ) и десятки минут (М) окончания зондирования атмосферы;

ВВВВ — высота расположения метеорологической станции над уровнем моря, м;

ББВ — отклонения наземного давления атмосферы от табличного на уровне метеостанции на момент окончания зондирования атмосферы, мм рт. ст.;

T_0T_0 — отклонение наземной виртуальной температуры от табличной на уровне метеостанции на момент окончания зондирования атмосферы, °С;

02, 04, 08, 12,... до 80 включительно — стандартные высоты над уровнем метеорологической станции (в сотнях метров);

10, 12, 14, 18, 22, 26, 30 — стандартные высоты, км;

ПП — среднее отклонение плотности воздуха от табличной в слое атмосферы от поверхности земли до соответствующей стандартной высоты, %;

ТТ — среднее отклонение температуры воздуха от табличной в слое атмосферы от поверхности Земли до стандартной высоты, °С;

НН — дирекционный угол направления среднего ветра (откуда дует) в слое атмосферы от поверхности Земли до стандартной высоты (в больших делениях угломера);

СС — скорость среднего ветра в том же слое, м/с;

$B_тB_т$ — достигнутая высота температурного зондирования атмосферы, км;

$B_вB_в$ — достигнутая высота ветрового зондирования, км.

Для обозначения отрицательных значений каких-либо данных, помещаемых в бюллетень, к первому знаку в группе цифр, отведенных для данного метеорологического элемента, прибавляют число 5. Отрицательные отклонения температуры от —50° С и ниже помещаются без прибавления числа 5.

В качестве примера расшифруем такой бюллетень, полученный в виде кодограммы:
«Метео 1110 — 12122 — 0018 — 03270 — 0203 — 693202 — 0403 — 693203 — 0803 — 683403 — 1203 — 633604 — 1603 — 663804 — 2003 — 644104 — 2403 — 634404 — 3003 — 624704 — 4002 — 655004 — 5002 — 635305 — 6001 — 625506 — 80 — 615708 — 10 — 615709 — 12 — 615711 — 14 — 615812 — 18 — 655813 — 22 — 625915 — 26 — 625915 — 30 — 626112 — 2028».

Таблица 19

Средние значения элементов кодограммы на стандартных высотах

Цифровой код	Высота над уровнем станции, м	ПП, %	ТТ, °С	НН, деления угломера	СС, м/с
0203—683202	200	+3	—18	32	2
0403—693203	400	+3	—19	32	3
0803—683403	800	+3	—18	34	3
1203—633604	1200	+3	—13	36	4
1603—663804	1600	+3	—16	38	4
2003—644104	2000	+3	—14	10	4
2028—	Достигнутая высота температурного зондирования 20 км, ветрового — 28 км.				

Написанное означает:

Метео 1110 — бюллетень «метеосредний», станции присвоен условный номер 10;

12122 — бюллетень составлен 12 числа в 12 ч 20 мин;

0018 — высота расположения метеостанции 18 м;

03270 — отклонение наземного барометрического давления от табличного +32 мм рт. ст; отклонение наземной виртуальной температуры —20° С.

Расшифровка значений метеорологических элементов на стандартных высотах до 2000 м представлена в табл. 19.

Глава V

ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС

5.1. ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим простейший случай, когда на вращающийся снаряд постоянной массы действует только опрокидывающий момент. Уравнения движения такого снаряда в координатах Эйлера имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\nu}\cos\delta)=0;\\ &\frac{d}{dt}[C(\dot{\varphi}+\dot{\nu}\cos\delta)\cos\delta+A\dot{\nu}\sin^2\delta]=0;\\ &A\ddot{\delta}+C(\dot{\varphi}+\dot{\nu}\cos\delta)\dot{\nu}\sin\delta-A\dot{\nu}^2\sin\delta\cos\delta=M. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1.1)$$

Из первого уравнения следует:

$$\dot{\varphi}+\dot{\nu}\cos\delta=\dot{\varphi}_0=\text{const}, \qquad (5.1.2)$$

где $\dot{\varphi}_0$ — угловая скорость вращения снаряда относительно оси канала ствола перед вылетом. Причем в общем случае оси симметрии снаряда и канала ствола не совпадают, так как снаряд или пуля могут двигаться в стволе с некоторым перекосом.

Второе уравнение системы (5.1.1), учитывая выражение (5.1.2), можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}[C\dot{\varphi}_0\cos\delta+A\dot{\nu}\sin^2\delta]=0,$$

откуда имеем

$$C\dot{\varphi}_0\cos\delta+A\dot{\nu}\sin^2\delta=\text{const}.$$

Пусть в точке вылета при $t=0$ $\dot{\nu}=\dot{\nu}_0$, $\delta=\delta_0$, тогда

$$C\dot{\varphi}_0\cos\delta + A\dot{\nu}\sin^2\delta = C\dot{\varphi}_0\cos\delta_0 + A\dot{\nu}_0\sin^2\delta_0.$$

Отсюда получим

$$\dot{\nu} = \dot{\nu}_0\frac{\sin^2\delta_0}{\sin^2\delta} + \frac{C\dot{\varphi}_0}{A}\frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin^2\delta}. \qquad (5.1.3)$$

Для устойчивых снарядов угол нутации δ не должен превышать 10—15°, следовательно, с достаточной точностью можем принять, что $\sin\delta=\delta$, а $\cos\delta=1$. Тогда выражение (5.1.3) упрощается:

$$\dot{\nu} = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} + \left(\dot{\nu}_0 - \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A}\right)\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^2.$$

Итак, в общем случае скорость прецессии $\dot{\nu}$ — величина переменная. Однако при $\delta_0=0$ имеем

$$\dot{\nu} = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} = \alpha = \text{const}. \qquad (5.1.4)$$

Условие $\delta_0=0$ соблюдается, когда снаряд хорошо центрирован в канале ствола и стрельба ведется в неподвижную (относительно точки вылета) атмосферу.

При выполнении условия (5.1.4) и с учетом выражения (5.1.2) третье уравнение системы (5.1.1) примет вид

$$\ddot{\delta} + \dot{\nu}^2(2-\cos\delta)\sin\delta = \frac{1}{A}M. \qquad (5.1.5)$$

Для опрокидывающего момента M справедливо выражение (1.8.3). Обозначив

$$m_1 = \frac{d^2h}{gA}\,1000\Delta(y)\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,v^2K_M\left(\frac{v}{a}\right),$$

получим

$$M = Am_1f_M(\delta).$$

Следовательно, вместо (5.1.5) можем записать

$$\ddot{\delta} + \dot{\nu}^2(2-\cos\delta)\sin\delta = m_1 f_M(\delta). \qquad (5.1.6)$$

При составлении условия (5.1.4) предполагалась малость углов нутации, поэтому и в формуле (5.1.6) естественно положить $\sin\delta=\delta$, $\cos\delta=1$ и, кроме того, в разложении в ряд $f_M(\delta)=\delta+a_1\delta^3+\ldots$ ограничиться учетом первого члена. Тогда окончательно

получим линейное уравнение, описывающее нутационное движение:

$$\ddot{\delta} + \dot{\alpha}^2\sigma\delta = 0, \tag{5.1.7}$$

где

$$\sigma = \left(1 - \frac{m_1}{\alpha^2}\right).$$

В общем случае значение σ переменное, так как величина m_1 примерно пропорциональна квадрату скорости поступательного движения снаряда и относительной плотности воздуха, которые уменьшаются по мере удаления снаряда от точки вылета и приближения к вершине траектории. Однако процессы, происходящие при движении снаряда около центра масс, развиваются значительно быстрее, чем процессы при поступательном движении снаряда, поэтому в первом приближении на определенных участках траектории можно принимать $\sigma = \text{const}$. В этом случае выражение (5.1.7) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами и решение его имеет вид $\delta = e^{rt}$. Подставляя это значение в формулу (5.1.7), после сокращения на e^{rt} получим характеристическое уравнение

$$r^2 + \alpha^2\sigma = 0,$$

откуда найдем

$$r = \pm i\alpha\sqrt{\sigma}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\sigma < 0$, $\quad r = \mp\alpha\sqrt{|\sigma|}$.

В этом случае корни характеристического уравнения действительны и решение записывается в виде

$$\delta = \hat{C}_1 e^{\alpha\sqrt{|\sigma|}\,t} + \hat{C}_2 e^{-\alpha\sqrt{|\sigma|}\,t}.$$

При увеличении времени t первый член этого выражения быстро возрастает, следовательно, значение δ неограниченно растет, снаряд неустойчив в полете. (В действительности условие $\sigma < 0$ необязательно свидетельствует о неограниченном росте угла нутации, но оно указывает на то, что величина δ становится больше предела, до которого справедливы полученные уравнения движения около центра масс.)

$$2)\ \sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2} > 0. \tag{5.1.8}$$

В этом случае корни мнимые и решение записывается в виде

$$\delta = \hat{C}_1 e^{i\alpha\sqrt{\sigma}t} + \hat{C}_2 e^{-i\alpha\sqrt{\sigma}t}.$$

Это решение периодическое и его можно привести к тригонометрической форме с помощью следствий из формул Эйлера:

$$e^{+ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Поскольку величины $(\hat{C}_1+\hat{C}_2)$ и $i(\hat{C}_2-\hat{C}_1)$ также являются произвольными постоянными, то окончательно решение при соблюдении условия (5.1.8) имеет вид

$$\delta = \hat{C}_1 \sin \alpha \sqrt{\sigma}\, t + \hat{C}_2 \cos \alpha \sqrt{\sigma}\, t.$$

Линеаризация третьего уравнения системы (5.1.1) проводилась при соблюдении условия (5.1.4), которое в свою очередь предполагает, что $\delta_0=0$. Следовательно, последнее требование должно соблюдаться и при интегрировании выражения (5.1.7). Полагая, что при $t=0$ $\delta=0$, получим $\hat{C}_2=0$. Положим, кроме того, что при $t=0$ $\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$, тогда, продифференцировав оставшуюся часть уравнения нутационного движения

$$\dot{\delta} = \alpha \sqrt{\sigma}\, \hat{C}_1 \cos \alpha \sqrt{\sigma}\, t,$$

получим при $t=0$

$$\hat{C}_1 = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{\sigma}}.$$

Окончательно можем записать

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{\sigma}} \sin \alpha \sqrt{\sigma}\, t. \qquad (5.1.9)$$

Эта формула характеризует нутационное движение как колебательный процесс с ограниченной амплитудой. Следовательно, выражение (5.1.8) является условием гироскопической устойчивости снаряда.

5.2. ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

На основании решения линеаризованной системы уравнений (5.1.1) установлено, что при отсутствии момента поверхностного трения, соблюдении требования $\delta_0=0$ и условия устойчивости (5.1.8) движение снаряда имеет следующие характерные особенности:

1) угловая скорость вращения снаряда постоянна и определяется по зависимости (5.1.2);

2) угловая скорость прецессии постоянна и имеет значение (5.1.4);

3) нутационное движение для устойчивых снарядов носит колебательный характер, определяемый формулой (5.1.9).

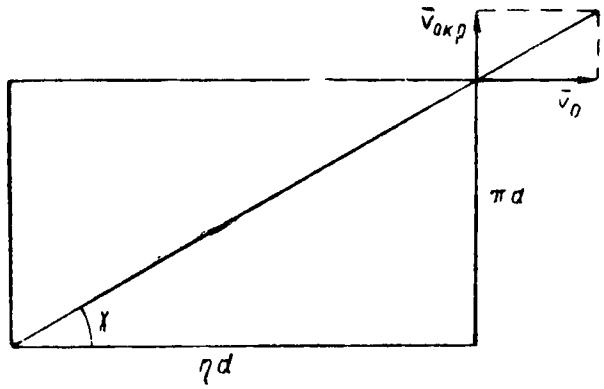


Рис. 24. Развертка канала ствола

При известной конструкции ствола орудия угловая скорость собственного вращения снаряда относительно полярной оси определяется следующим образом. Если γ — угол наклона нарезов к оси канала ствола (рис. 24), а η — длина хода нарезов в калибрах, то

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\pi d}{\eta d} = \frac{\pi}{\eta}.$$

Окружную скорость наружной поверхности снаряда можно подсчитать по соотношению

$$v_{окр} = v_0 \operatorname{tg}\gamma = \frac{\pi}{\eta} v_0,$$

но, с другой стороны, $v_{окр} = \frac{d}{2}\dot{\varphi}_0$. Исключая из этих равенств величину $v_{окр}$, найдем

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{2\pi}{\eta d} v_0.$$

Для 7,62-мм пули при $v_0 = 860$ м/с и $\eta = 40$ получим

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{2\pi}{40 \cdot 7{,}62 \cdot 10^{-3}} 860 = 1{,}77 \cdot 10^4 \text{ 1/с}.$$

Таким образом, для винтовочной пули $\dot{\varphi}_0 = 170000$ об/мин. С увеличением калибра это число уменьшается.

Для современных снарядов и пуль отношение полярного момента к экваториальному находится в пределах $\frac{A}{C} = 9 \div 11$. Принимая среднее значение $\frac{A}{C} = 10$, для угловой скорости прецессионного движения получим

$$\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} \approx \frac{\dot{\varphi}_0}{20}.$$

Таким образом, скорость прецессионного движения примерно в двадцать раз меньше скорости собственного вращения снаряда относительно его полярной оси.

Нутационные колебания совершаются с полупериодом (временем между двумя максимальными значениями амплитуд)

$$T_\delta = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{\sigma}}.$$

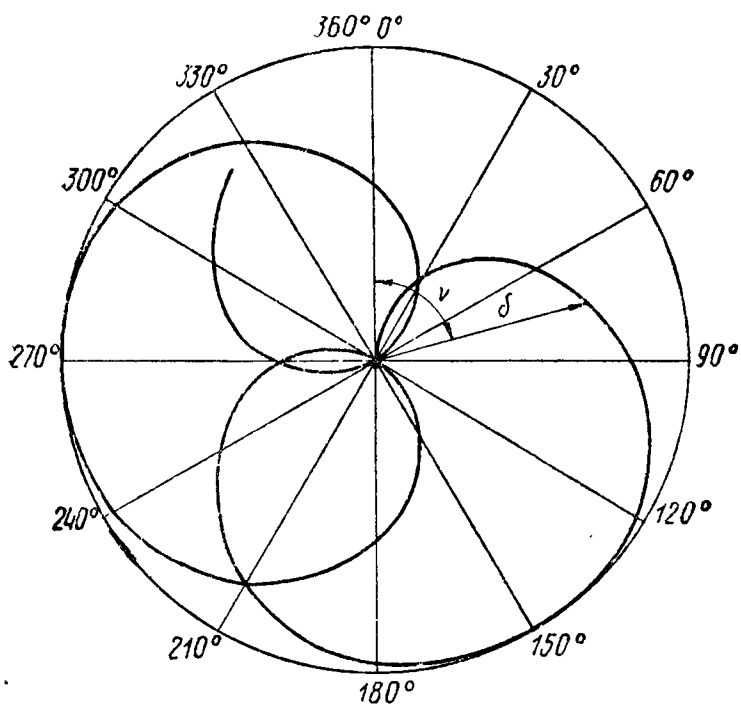


Рис. 25. Кривая движения снаряда около центра масс

Для устойчивых современных снарядов величина $\sqrt{\sigma} = 0{,}45 \div 0{,}70$, т. е. колеблется в довольно широких пределах, причем

имеется тенденция к выбору меньшего значения. За один полупериод плоскость сопротивления повернется на угол

$$\Delta\nu = \alpha T_\delta = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma}}.$$

При $\sqrt{\sigma} = 0{,}6$ $\Delta\nu = 300°$.

Если откладывать угол прецессии $\nu = \nu_0 + \alpha t$ в качестве полярного угла, а по радиусу (в некотором масштабе) — угол нутации δ, то получим график движения снаряда около центра масс в полярных координатах (рис. 25).

5.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА В КООРДИНАТАХ КРЫЛОВА

Рассмотрим движение снаряда около центра масс в более общем случае с учетом всех силовых факторов, входящих в систему (2.3.2). На основании первого уравнения этой системы имеем

$$\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y = \dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{M_p}{C}\,dt,$$

где $\dot{\varphi}_a$ — угловая скорость вращения снаряда относительно вектора скорости;

$\dot{\varphi}_{0i}$ — угловая скорость снаряда в момент выхода из канала ствола.

При интегрировании считают величину M_p постоянной, полярный момент C также выносят за знак интеграла некоторым средним для рассматриваемого отрезка траектории значением.

Для случая движения снаряда постоянной массы и без учета момента поверхностного трения можем написать

$$\dot{\varphi} + (\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y = \dot{\varphi}_0 = \text{const}.$$

Определим проекции на координатные оси остальных силовых факторов $(\bar{M} + \bar{M}_D)_{y1}$ и $(\bar{M} + \bar{M}_D)_{z1}$.
Запишем:

$$M = Am_1 f_м(\delta); \quad M_D = Am_2\omega,$$

где

$$m_1 = \frac{d^2 h}{gA}\,1000\,\Delta(y)\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,v^2 K_м\left(\frac{v}{a}\right);$$

$$m_2 = \frac{dl^3}{gA}\ 1000\Delta(y)\ \frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\ vK_D\left(\frac{v}{a}\right);$$

$$\omega^2 = \dot{\delta}_y^2 + \dot{\delta}_z^2.$$

Поскольку M_D зависит от ω линейно, соответствующие проекции можно представить в таком виде:

$$M_{D_{y1}} = -Am_2\dot{\delta}_y; \qquad M_{D_{z1}} = -Am_2\dot{\delta}_z.$$

Если разложить в ряд Тейлора функцию $f_м(\delta)$ и ограничиться первым членом:

$$f_м(\delta) = \delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2},$$

то проекции опрокидывающего момента на осях будут иметь вид:

$$M_{y1} = Am_1\delta_y; \quad M_{z1} = Am_1\delta_z.$$

С учетом сказанного двум последним уравнениям системы (2.3.2), после деления на величину A, можно придать такую форму:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\delta}_y + [(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y - 2\alpha](\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y = m_1\delta_y - m_2\dot{\delta}_y; \\ &\frac{d}{dt}[(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\cos\delta_y] - \dot{\delta}_y[(\dot{\theta} + \dot{\delta}_z)\sin\delta_y - 2\alpha] = m_1\delta_z - m_2\dot{\delta}_z, \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.1)$$

где $\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_a}{2A}$.

В правых частях равенств (5.3.1) мы уже линеаризировали силовые факторы. Имеет смысл линеаризировать и левые части, т. е. положить $\sin\delta_i = \delta_i$, $\cos\delta_i = 1$ и, кроме того, пренебречь членами второго порядка малости типа $\delta_i\dot{\delta}_k$. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\delta}_y - 2\alpha\dot{\delta}_z + m_2\dot{\delta}_y - m_1\delta_y = 2\alpha\dot{\theta}; \\ &\ddot{\delta}_z + 2\alpha\dot{\delta}_y + m_2\dot{\delta}_z - m_1\delta_z = -\ddot{\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.2)$$

Поскольку угловая скорость поворота вектора скорости центра масс определена при решении основной задачи внешней баллистики и имеет величину $\dot{\theta} = -\frac{q\cos\theta}{v}$, то правые части в системе (5.3.2) следует считать известными функциями времени.

Введя комплексную переменную

$$z = i\delta_y + \delta_z,$$

умножив первое уравнение системы (5.3.2) на мнимую единицу i и сложив его со вторым, получим

$$\ddot{z} - (2i\alpha - m_2)\dot{z} - m_1 z = 2i\alpha\dot{\theta} - \ddot{\theta}. \tag{5.3.3}$$

Решение линейного неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного и любого частного решения. Поэтому рассмотрим сначала решение однородного уравнения

$$\ddot{z} - (2i\alpha - m_2)\dot{z} - m_1 z = 0 \tag{5.3.4}$$

в виде

$$z = \hat{C} \exp \int_0^t (\mu + i\omega)\, dt,$$

где $\hat{C}$ — произвольная постоянная;

μ, ω — произвольные функции времени.

Можем написать:

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)\hat{C} \exp \int_0^t (\mu + i\omega)\, dt;$$

$$\ddot{z} = [\dot{\mu} + i\dot{\omega} + (\mu + i\omega)^2]\hat{C} \exp \int_0^t (\mu + i\omega)\, dt.$$

Подставляя эти значения в выражение (5.3.4), найдем, что

$$\dot{\mu} + \mu^2 + \mu m_2 - \omega^2 + 2\alpha\omega - m_1 + i(\dot{\omega} + 2\mu\omega - 2\mu\alpha + m_2\omega) = 0.$$

Приравняем к нулю отдельно действительную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mu} + \mu^2 + \mu m_2 - \omega^2 + 2\alpha\omega - m_1 = 0; \\ &\dot{\omega} + 2\mu\omega - 2\mu\alpha + m_2\omega = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5.3.5}$$

Член $\exp \int_0^t \mu dt$ представляет собой изменение амплитуды. Поскольку коэффициенты в зависимости (5.3.4) меняются сравнительно медленно, этот член должен равняться примерно единице, следовательно, μ — малая величина. Это дает возможность решить систему (5.3.5) методом последовательных приближений. Прене-

брегая в первом уравнении (5.3.5) тремя первыми членами вследствие их малости, получим

$$\omega_{1,2} = \alpha\left(1 \pm \sqrt{\sigma}\right), \tag{5.3.6}$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2}.$$

Для условия устойчивости в общем виде справедлива запись

$$\alpha^2\sigma = \alpha^2 - m_1 > 0. \tag{5.3.7}$$

При несоблюдении этого условия в решении появляются экспоненциальные члены с положительными степенями и амплитуда угла нутации δ непрерывно растет. При $\alpha = \alpha_0 \neq 0$ условия (5.3.7) и (5.1.8) совпадают.

С учетом равенства (5.3.6) из второго уравнения (5.3.5) имеем

$$\mu = \frac{\dot{\omega} + m_2\omega}{2\alpha - 2\omega} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\,\frac{\sqrt{\sigma}\pm 1}{2\sqrt{\sigma}} - \frac{\dot{\sqrt{\sigma}}}{2\sqrt{\sigma}} - m_2\,\frac{\sqrt{\sigma}\pm 1}{2\sqrt{\sigma}}.$$

Прежде чем приступить ко второму приближению, оценим величину одного из слагаемых, которыми ранее пренебрегли, например

$$\frac{\mu^2}{\omega^2} \approx 5\,\frac{\mu^2}{\alpha^2}.$$

Здесь учтено, что из условия устойчивости $\sqrt{\sigma} = 0{,}45 \div 0{,}70$ (принято $\sqrt{\sigma} = 0{,}6$) и в выражении (5.3.6) взят наименьший корень. Для определения величины μ также ограничимся рассмотрением только одного, наибольшего члена $\mu = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}}$. Имеем

$$\frac{\dot{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}} = -\frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{\dot{m}_1}{\delta} = -\frac{1}{2}\,\frac{\dot{m}_1}{m_1}\,\frac{m_1}{\alpha^2\sigma}.$$

Из условия устойчивости:

$$\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2} = 0{,}2 \div 0{,}5; \qquad \frac{m_1}{\sigma^2} = 0{,}5 \div 0{,}8,$$

следовательно, можем положить, что

$$\frac{m_1}{\alpha^2\sigma} \approx \frac{0{,}8}{0{,}35} = 2{,}3.$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{V\sigma}}{V\sigma} = -1{,}15\frac{\dot{m}_1}{m_1} = -2{,}3\frac{\dot{v}}{v},$$

где

$$\dot{v} = -0{,}48\cdot 10^{-3}\frac{i}{C_q d}\Delta(y)\,v^2 c_x\left(\frac{v}{a}\right).$$

Окончательно получим $\left(\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} = \frac{\pi}{\eta}\frac{C v_0}{Ad}\right)$:

$$\frac{\mu^2}{\omega^2} = 5\left[1{,}15\cdot 0{,}48\cdot 10^{-3}\,\frac{\eta A v i}{\pi C v_0 C_q}\Delta(y)\,c_x\left(\frac{v}{a}\right)\right]^2.$$

Положим: $\eta = 40$; $\frac{A}{C} = 10$; $v = v_0$; $i = 1$; $C_q = 10$; $\Delta(y) = 1$; $c_x\left(\frac{v}{a}\right) = 0{,}3$. Тогда найдем

$$\frac{\mu^2}{\omega^2} = 5\left[1{,}15\cdot 0{,}48\cdot 10^{-3}\,\frac{40\cdot 10\cdot 0{,}3}{\pi\,10}\right]^2 = 0{,}22\cdot 10^{-4}.$$

Заключаем, что уточнять решение (5.3.6) не имеет смысла. Окончательно имеем

$$z = \hat{C}_{1,2}\exp\int_0^t\left[-\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}+m_2\right)\frac{V\sigma \pm 1}{V\sigma} - \frac{\dot{V\sigma}}{2V\sigma} + i\,\omega_{1,2}\right]dt. \quad (5.3.8)$$

Исследуем это решение при условии, что $\alpha = \text{const}$, $m_1 = \text{const}$, $m_2 = 0$. В этом случае ($\sigma = \text{const}$, $\omega = \text{const}$),

$$z = \hat{C}_{1,2}\exp i\omega_{1,2}t. \quad (5.3.9)$$

Условие устойчивости $\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2} > 0$ полностью соответствует выражению (5.1.8).

Для определения постоянных $\hat{C}_{1,2}$ воспользуемся начальными условиями ($t = 0$):

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 = i\delta_{y0} + \delta_{z0};\\ \dot{z} &= \dot{z}_0 = i\dot{\delta}_{y0} + \dot{\delta}_{z0}. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.10)$$

Подставив эти значения в формулу (5.3.9), получим:

$$z_0 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2; \qquad \dot{z}_0 = i\omega_1\hat{C}_1 + i\omega_2\hat{C}_2,$$

Откуда имеем:

$$\hat{C}_1 = \frac{-1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}(i\dot{z}_0 + \omega_2 z_0); \quad \hat{C}_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}(i\dot{z}_0 + \omega_1 z_0).$$

Перейдя к переменным δ_y и δ_z, напишем

$$2\alpha\sqrt{\sigma}(i\delta_y + \delta_z) = -(-\dot{\delta}_{y0} + i\dot{\delta}_{z0} + i\omega_2\delta_{y0} + \omega_2\delta_{z0})(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) +$$

$$+ (-\dot{\delta}_{y0} + i\dot{\delta}_{z0} + i\omega_1\delta_{y0} + \omega_1\delta_{z0})(\cos\omega_2 t + i\sin\omega_2 t).$$

Приравнивая между собой действительную и мнимую части (разделяя переменные), получим:

$$2\alpha\sqrt{\sigma}\,\delta_y = (\dot{\delta}_{y0} - \omega_2\delta_{z0})\sin\omega_1 t - (\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0})\sin\omega_2 t -$$

$$- (\dot{\delta}_{z0} + \omega_2\delta_{y0})\cos\omega_1 t + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0})\cos\omega_2 t;$$

$$2\alpha\sqrt{\sigma}\,\delta_z = (\dot{\delta}_{y0} - \omega_2\delta_{z0})\cos\omega_1 t - (\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0})\cos\omega_2 t +$$

$$+ (\dot{\delta}_{z0} + \omega_2\delta_{y0})\sin\omega_1 t - (\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0})\sin\omega_2 t.$$

Эти формулы могут быть записаны в более компактном виде:

$$\left.\begin{aligned}\delta_y &= B_1\sin(\omega_1 t + \Delta_1) - B_2\sin(\omega_2 t + \Delta_2);\\ \delta_z &= -B_1\cos(\omega_1 t + \Delta_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \Delta_2),\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.11)$$

если положить:

$$B_1 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\sqrt{(\dot{\delta}_{y0} - \omega_2\delta_{z0})^2 + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_2\delta_{y0})^2};$$

$$B_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\sqrt{(\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0})^2 + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0})^2};$$

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{\dot{\delta}_{z0} + \omega_2\delta_{y0}}{\dot{\delta}_{y0} - \omega_2\delta_{z0}};$$

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = -\frac{\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0}}{\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0}}.$$

Установим связь между решениями в координатах Эйлера и Крылова. Определим угол нутации

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}\,t + \Delta_3)}, \qquad (5.3.12)$$

где

$$\Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2.$$

В частном случае, когда $\dot{\delta}_{y0} = \dot{\delta}_{z0} = 0$, имеем:

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\,\dot{\delta}_0,$$

где

$$\dot{\delta}_0 = \sqrt{\dot{\delta}_{y0}^2 + \dot{\delta}_{z0}^2}\ ; \qquad \operatorname{tg}\Delta_1 = -\operatorname{tg}\Delta_2 = \frac{\dot{\delta}_{z0}}{\dot{\delta}_{y0}}\ .$$

Далее получим

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\sqrt{2(1-\cos 2\alpha\sqrt{\sigma}t)} = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}\sin\alpha\sqrt{\sigma}\,t.$$

Это выражение полностью совпадает с равенством (5.1.9). В общем случае $|B_1| \neq |B_2|$, амплитуда угла нутации меняется в пределах $|B_1| + |B_2| \leqslant \delta \leqslant |B_1| - |B_2|$ и ни в какой момент времени не обращается в нуль. Следовательно, при $\delta_0 \neq 0$ говорить о нутационном движении как о колебательном процессе уже нельзя.

Определим прецессию:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\delta_z}{\delta_y}\ ; \quad \frac{\dot{\nu}}{\cos^2\nu} = \frac{\dot{\delta}_z\delta_y - \delta_z\dot{\delta}_y}{\delta_y^2}\ .$$

Поскольку $\cos\nu = \dfrac{\delta_y}{\sqrt{\delta_y^2+\delta_z^2}}$, то справедлива зависимость

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{\delta}_z\delta_y - \delta_z\dot{\delta}_y}{\sqrt{\delta_y^2+\delta_z^2}} = \frac{\omega_1 B_1^2 + \omega_2 B_2^2 - 2\alpha B_1 B_2\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \Delta_3)}{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \Delta_3')}\ . \qquad (5.3.13)$$

При $\dot{\delta}_{y0} = \dot{\delta}_{z0} = 0$:

$$B_1 = B_2 \text{ и } \dot{\nu} = \alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A},$$

что совпадает с формулой (5.1.4). Выражение (5.3.13) можно представить в виде

$$\dot{\nu} = \alpha\left[1 + \frac{\sqrt{\sigma}\,(B_1^2 - B_2^2)}{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \Delta_3)}\right].$$

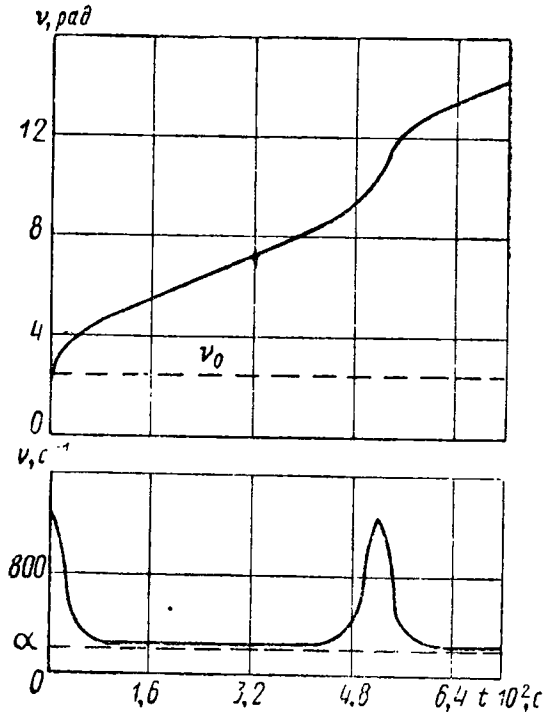


Рис. 26. Изменения угла и угловой скорости прецессии снаряда в функции времени при $\delta_0 \neq 0$

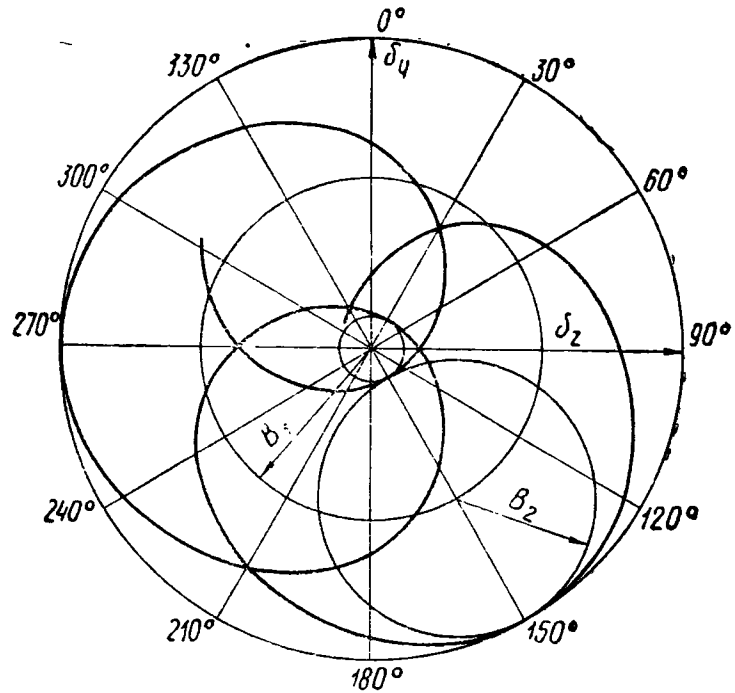


Рис. 27. Кривая движения снаряда около центра масс в координатах δ_y, δ_z при общих начальных условиях ($B_1 \neq B_2$)

Из графика изменений угловой скорости ν и угла прецессии

$$\nu = \nu_0 + \int_0^t \dot{\nu}\, dt \quad \text{(рис. 26)}$$

при $|B_1| \neq |B_2|$ следует, что разложение движения вращающегося снаряда около центра масс на нутацию и прецессию в координатах Эйлера удобно только в случае, когда $\delta_0 = 0$. В остальных случаях лучше давать этому движению иную трактовку. Если обозначить:

$$\delta_{y1} = B_1 \sin(\omega_1 t + \Delta_1); \qquad \delta_{z1} = B_1 \cos(\omega_1 t + \Delta_1);$$

$$\delta_{y2} = B_2 \sin(\omega_2 t + \Delta_2); \qquad \delta_{z2} = B_2 \cos(\omega_2 t + \Delta_2),$$

то очевидно:

$$\delta_1 = \sqrt{\delta_{y1}^2 + \delta_{z1}^2} = B_1;$$

$$\delta_2 = \sqrt{\delta_{y2}^2 + \delta_{z2}^2} = B_2.$$

Движение оси снаряда около центра масс распадается на два прецессионных движения — быстрое и медленное с угловыми скоростями

$$\omega_1 = \alpha\left(1 + \sqrt{\sigma}\right); \qquad \omega_2 = \alpha\left(1 - \sqrt{\sigma}\right)$$

и амплитудами

$$\delta_1 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{y0} - \omega_2 \delta_{z0})^2 + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_2 \delta_{y0})^2};$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{y0} - \omega_1 \delta_{z0})^2 + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_1 \delta_{y0})^2}.$$

График движения снаряда около центра масс в координатах δ_y, δ_z показан на рис. 27.

5.4. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ЦЕНТРА МАСС И ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА НА ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА

Положим $\alpha = \text{const}$, $m_2 = 0$, $\sigma = \text{var}$. Тогда решение (5.3.8) примет вид

$$z = \hat{C}_{1,2}\, \sigma^{-\frac{1}{4}} \exp \int_0^t i\omega_{1,2}\, dt. \qquad (5.4.1)$$

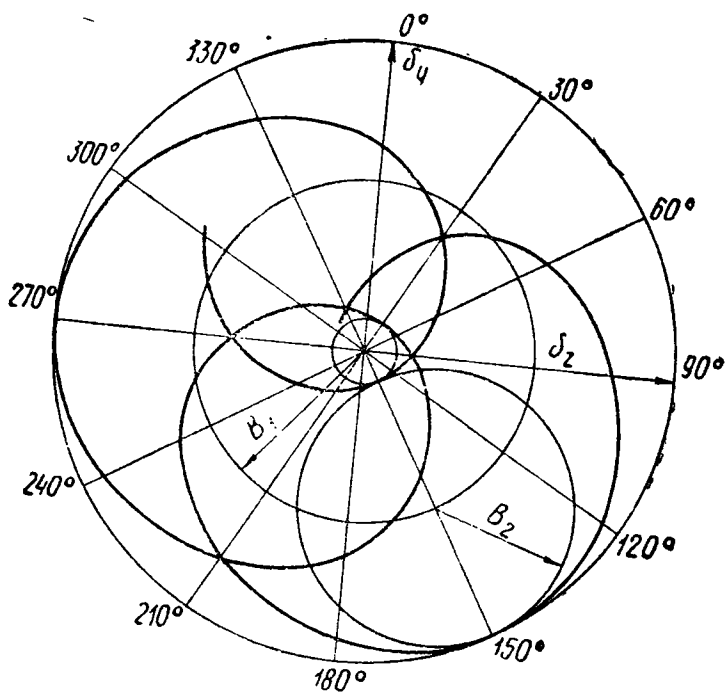


Рис. 27. Кривая движения снаряда около центра масс в координатах δ_y, δ_z при общих начальных условиях ($B_1 \neq B_2$)

Постоянные $\hat{C}_{1,2}$ определим, используя начальные условия (5.3.10):

$$z_0 = \sigma_0^{-\frac{1}{4}}(\hat{C}_1 + \hat{C}_2);$$

$$\dot{z}_0 = \sigma_0^{-\frac{1}{4}}(\omega_1\hat{C}_1 + \omega_2\hat{C}_2) - \frac{1}{4}\sigma_0^{-\frac{5}{4}}\dot{\sigma}_0(\hat{C}_1 + \hat{C}_2);$$

$$\hat{C}_1 = -\frac{\sigma^{-\frac{1}{4}}}{2\alpha}\left[i\left(\dot{z}_0 + \frac{1}{4}\frac{\dot{\sigma}_6}{\sigma_0}z_0\right) + \omega_2 z_0\right];$$

$$\hat{C}_2 = \frac{\sigma^{-\frac{1}{4}}}{2\alpha}\left[i\left(\dot{z}_0 + \frac{1}{4}\frac{\dot{\sigma}_0}{\sigma_0}z_0\right) + \omega_1 z_0\right].$$

При этом решение (5.4.1) запишется в виде

$$z = \frac{\mp 1}{2\alpha(\sigma_0\sigma)^{0,25}}\left[i\left(\dot{z}_0 + \frac{1}{4}\frac{\dot{\sigma}_0}{\sigma_0}z_0\right) + \omega_{1,2}z_0\right]e^{i\int_0^t \omega_{1,2}dt}.$$

Отсюда следует, что амплитуды как быстрой, так и медленной прецессий изменяются пропорционально величине $\sigma^{-0,25} = \left(1-\frac{m_1}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{4}}$. На начальном участке траектории значение m_1 уменьшается пропорционально квадрату скорости, следовательно, на этом участке амплитуда обеих прецессий пропорционально убывает. После прохождения снарядом точки с минимальной скоростью, которая лежит на нисходящей ветви траектории сразу за ее вершиной, величина m_1 начинает возрастать пропорционально квадрату скорости. На этом участке изменение скорости способствует пропорциональному увеличению амплитуды прецессионных колебаний.

Если считать коэффициенты уравнения (5.3.4) постоянными ($\dot{\alpha}=\dot{m}_1=\dot{m}_2=0; \dot{\sqrt{\sigma}}=0$), то решение (5.3.8) будет иметь вид

$$z = \hat{C}_{1,2}\exp\left[-m_2\frac{\sqrt{\sigma}\pm 1}{\sqrt{\sigma}} + i\omega_{1,2}\right]t. \qquad (5.4.2)$$

Для определения постоянных $\hat{C}_{1,2}$ воспользуемся условиями (5.3.10):

$$z_0 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2;$$

$$\dot{z}_0 = \left(-m_2 \frac{\sqrt{\sigma}+1}{\sqrt{\sigma}} - i\omega_1\right)\hat{C}_1 + \left(-m_2 \frac{\sqrt{\sigma}-1}{\sqrt{\sigma}} + i\omega_2\right)\hat{C}_2;$$

$$\hat{C}_1 = -\frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\left[i\dot{z}_0 + \left(\omega_2 + im_2\frac{\sqrt{\sigma}-1}{\sqrt{\sigma}}\right)z_0\right];$$

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\left[i\dot{z}_0 + \left(\omega_1 + im_2\frac{\sqrt{\sigma}+1}{\sqrt{\sigma}}\right)z_0\right].$$

Решение (5.4.2) представим в такой форме:

$$z = \hat{C}_1 e^{-m_2\frac{\sqrt{\sigma}+1}{\sqrt{\sigma}}t}(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) +$$

$$+ \hat{C}_2 e^{-m_2\frac{\sqrt{\sigma}-1}{\sqrt{\sigma}}t}(\cos\omega_2 t + i\sin\omega_2 t).$$

Не разделяя переменных, заметим, что амплитуда быстрой прецессии уменьшается с коэффициентом затухания, превосходящим m_2, так как множитель $\frac{\sqrt{\sigma}+1}{\sqrt{\sigma}} \approx 3 \div 4$. Амплитуда медленной прецессии растет, поскольку $\sqrt{\sigma} < 1$. На восходящей ветви этот рост компенсируется уменьшением амплитуды медленной прецессии за счет падения скорости центра масс. На нисходящей ветви оба фактора — и увеличение скорости центра масс и демпфирующий момент — действуют в одну сторону, повышая амплитуду медленной прецессии.

5.5. ДВИЖЕНИЕ РЕАКТИВНОГО, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВРАЩЕНИЕМ И ОПЕРЕННОГО СНАРЯДОВ

Условие устойчивости для снаряда переменной массы на основании (5.3.7) имеет вид

$$\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2} > 0$$

и обладает той особенностью, что на активном участке траектории обе величины m_1 и α являются переменными. Стремятся устано-

вить такой наклон сопл, чтобы отношение $\frac{m_1}{\alpha^2}$ на всем активном участке оставалось примерно постоянным. На этом основании будем считать $\dot{\sigma}=0$. Положим также $m_2=0$. Тогда решение (5.3.8) запишется в виде

$$z = \hat{C}_{1,2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^{\frac{\sqrt{\sigma}\pm 1}{\sqrt{\sigma}}t} \exp i\int_0^t \omega_{1,2}\,dt. \qquad (5.5.1)$$

Определяем коэффициенты $\hat{C}_{1,2}$ по начальным условиям (5.3.10):

$$z_0 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2;$$

$$\dot{z}_0 = i\omega_1\hat{C}_1 + i\omega_2\hat{C}_2 - \frac{\sqrt{\sigma}+1}{\sqrt{\sigma}}\hat{C}_1 + \frac{1-\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\hat{C}_2;$$

$$\hat{C}_1 = -\frac{i\sqrt{\sigma}}{2(\alpha\sigma - i)}\left[\dot{z}_0 - \left(i\omega_2 + \frac{1-\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\right)z_0\right];$$

$$\hat{G}_2 = \frac{i\sqrt{\sigma}}{2(\alpha\sigma - i)}\left[\dot{z}_0 + \left(i\omega_2 + \frac{1+\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\right)z_0\right].$$

В этом случае решение (5.5.1) примет форму:

$$z = \hat{C}_1\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\frac{1+\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}t}(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) +$$

$$+\hat{C}_2\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{\frac{1-\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}t}(\cos\omega_2 t + i\sin\omega_2 t),$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2} \approx \text{const}.$$

Не разделяя переменных, отметим, что на активном участке с ростом угловой скорости

$$\alpha = \frac{C}{2A}\left[\dot{\varphi}_0 + \frac{M_p}{C_{cp}}(t - t_0)\right]$$

амплитуда быстрой прецессии убывает, а медленной — растет.

Оперенные снаряды либо не имеют вращения, либо вращаются с такой незначительной скоростью (для увеличения кучности), что ею можно пренебречь.

Условие устойчивости (5.3.7) при $\alpha \to 0$ имеет вид $-m_1 > 0$, т. е. опрокидывающий момент должен быть заменен стабилизирующим с обратным знаком. Решение (5.3.8) в этом случае запишется в такой форме:

$$z = \hat{C}_{1,2} \exp \int_0^t \left(-m_2 \pm i\sqrt{m_1}\right) dt.$$

Величины h и $K_м$, входящие в формулу для подсчета значения m_1, вычисляются по зависимостям, отличным от выражений, применяемых для снарядов, стабилизированных вращением.

Для определения постоянных $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ опять воспользуемся начальными условиями (5.3.10):

$$z_0 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2;$$

$$\dot{z}_0 = \left(-m_2 + i\sqrt{m_1}\right)\hat{C}_1 + \left(-m_2 - i\sqrt{m_1}\right)\hat{C}_2;$$

$$\hat{C}_1 = -\frac{1}{2\sqrt{m_1}}\left[i\dot{z}_0 + \left(im_2 - \sqrt{m_1}\right) z_0\right];$$

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2\sqrt{m_1}}\left[i\dot{z}_0 + \left(im_2 + \sqrt{m_1}\right) z_0\right].$$

Разделим переменные:

$$i\delta_y + \delta_z = -\frac{1}{2\sqrt{m_i}}\left[i\left(i\dot{\delta}_{y0} + \dot{\delta}_{z0}\right) + \left(im_2 - \sqrt{m_1}\right)(i\delta_{y0} + \delta_{z0})\right] \times$$

$$\times \left(\cos\sqrt{m_1}\, t + i\sin\sqrt{m_1}\, t\right) + \frac{1}{2\sqrt{m_1}}\left[i(i\dot{\delta}_{y0} + \dot{\delta}_{z0}) + \right.$$

$$\left. + \left(im_2 + \sqrt{m_1}\right)(i\delta_{y0} + \delta_{z0})\right]\left(\cos\sqrt{m_1}\, t - i\sin\sqrt{m_1}\, t\right).$$

Приравнивая между собой действительную и мнимую части, получим:

$$\left.\begin{aligned} \delta_y &= \left[\frac{\dot{\delta}_{y0} + m_2\delta_{y0}}{\sqrt{m_1}}\sin\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \delta_{y0}\cos\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt\right] e^{-m_2 t}; \\ \delta_z &= \left[\frac{\dot{\delta}_{z0} + m_2\delta_{z0}}{\sqrt{m_1}}\sin\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \delta_{z0}\cos\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt\right] e^{-m_2 t}. \end{aligned}\right\} \quad (5.5.2)$$

Угол δ_y зависит только от начальных условий δ_{y0} и $\dot{\delta}_{y0}$, угол δ_z — от начальных условий δ_{z0} и $\dot{\delta}_{z0}$, поскольку уравнения (5.3.2) при $\alpha=0$ становятся независимыми.

Перепишем уравнения (5.5.2) в виде:

$$\delta_y = B_1 e^{-m_2 t} \sin\left[\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \Delta_1\right];$$

$$\delta_z = B_2 e^{-m_2 t} \sin\left[\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \Delta_2\right],$$

где

$$B_1 = \sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}_{y0} + m_2 \delta_{y0}}{\sqrt{m_1}}\right)^2 + \delta_{y0}^2};$$

$$B_2 = \sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}_{z0} + m_2 \delta_{z0}}{\sqrt{m_1}}\right)^2 + \delta_{z0}^2}.$$

Члены Δ_1 и Δ_2 найдем из выражений:

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{\sqrt{m_1}\,\delta_{y0}}{\dot{\delta}_{y0} + m_2 \delta_{y0}};$$

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \frac{\sqrt{m_1}\,\delta_{z0}}{\dot{\delta}_{z0} + m_2 \delta_{z0}}.$$

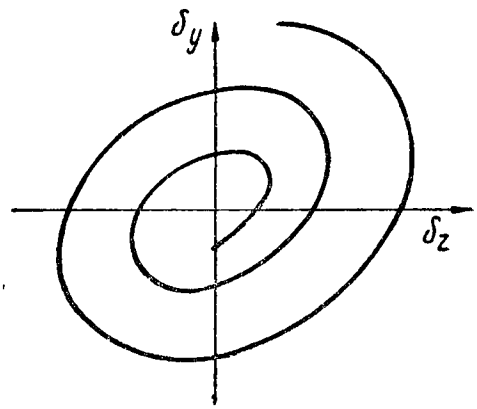


Рис. 28. Кривая движения оперенного снаряда около центра масс при $m_2 \neq 0$, $B_1 \neq B_2$

В этом случае имеем

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} =$$

$$= e^{-m_2 t} \sqrt{B_1^2 \sin^2\left[\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \Delta_1\right] + B_2^2 \sin^2\left[\int_0^t \sqrt{m_1}\, dt + \Delta_2\right]}.$$

При $m_2=0$ — это уравнение эллипса. График движения оперенного снаряда около центра масс при $m_2 \neq 0$ представлен на рис. 28.

5.6. ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИИ НА ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА

До сих пор рассматривалось решение однородного уравнения (5.3.4). Определим частное решение неоднородного уравнения (5.3.3), которое представим в виде

$$z_1 = \hat{C}_{1,2}(t) \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})\, dt, \tag{5.6.1}$$

где $\mu_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ — функции, удовлетворяющие системе (5.3.5);

$\hat{C}_{1,2}(t)$ — произвольные функции.

Поскольку для определения функций $\hat{C}_{1,2}$ имеется только условие (5.3.3), то одно из соотношений между ними может быть назначено произвольно.

Найдем первую производную величины (5.6.1):

$$\dot{z}_1 = \hat{C}_{1,2}(\mu_{1,2} + i\omega_{1,2}) \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})\, dt + \dot{\hat{C}}_{1,2} \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})\, dt.$$

В качестве второго соотношения между функциями $\hat{C}_{1,2}$ выберем уравнение

$$\dot{\hat{C}}_{1,2} \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})\, dt = 0.$$

Найдем вторую производную, учитывая последнее равенство:

$$\ddot{z}_1 = \hat{C}_{1,2}(\dot{\mu}_{1,2} + i\dot{\omega}_{1,2}) \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1.2})\, dt +$$

$$+ \hat{C}_{1,2}(\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})^2 \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1,2})\, dt +$$

$$+ \dot{\hat{C}}_{1,2}(\mu_{1,2} + i\omega_{1,2}) \exp \int_0^t (\mu_{1,2} + i\omega_{1.2})\, dt.$$

Подставляя функцию (5.6.1) и ее производные в формулу (5.3.3) и учитывая, что $\mu_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ удовлетворяют системе (5.3.5), получим

$$\dot{\hat{C}}\,(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,\exp\int_0^t(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt=2i\alpha\dot{\theta}-\ddot{\theta}\,.$$

Итак, для определения функций $\hat{C}_{1,2}$ имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\hat{C}}_{1,2}\exp\int_0^t(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt=0;\\&\dot{\hat{C}}_{1,2}(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\exp\int_0^t(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt=2i\alpha\dot{\theta}-\ddot{\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.6.2)$$

Поскольку

$$\omega_1-\omega_2=2\alpha\sqrt{\sigma}\,;\qquad\mu_1-\mu_2=-\frac{2\dot{\alpha}}{\alpha\sqrt{\sigma}}-\frac{2m_2}{\sqrt{\sigma}}\,,$$

решив уравнения (5.6.2), найдем, что

$$\dot{\hat{C}}_{1,2}=\pm\frac{2i\alpha\dot{\theta}-\ddot{\theta}}{2i\alpha\sqrt{\sigma}-\dfrac{2\dot{\alpha}}{\alpha\sqrt{\sigma}}-\dfrac{2m_2}{\sqrt{\sigma}}}\exp\int_0^t-(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt.$$

Интегрируя и подставляя интегралы в формулу (5.6.1), получим

$$z_1=\pm\int_0^t\left[\frac{2i\alpha\dot{\theta}-\ddot{\theta}}{2i\alpha\sqrt{\sigma}-\dfrac{2\dot{\alpha}}{\alpha\sqrt{\sigma}}-\dfrac{2m_2}{\sqrt{\sigma}}}\exp\int_0^t-(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt\right]dt\times$$

$$\times\exp\int_0^t(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,dt.$$

Можно показать, что это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям. Запись несколько упростится, если обозначить переменную интегрирования в квадратных скобках через τ и условно внести последний множитель под знак интеграла:

$$z_1=\pm\int_0^t\left[\frac{2i\alpha\dot{\theta}-\ddot{\theta}}{2i\alpha\sqrt{\sigma}-\dfrac{2\dot{\alpha}}{\alpha\sqrt{\sigma}}-\dfrac{2m_2}{\sqrt{\sigma}}}\exp\int_0^t(\mu_{1,2}+i\omega_{1,2})\,d\tau\right]dt.\qquad(5.6.3)$$

Коэффициент в квадратных скобках является функцией τ. Интеграл может быть определен численно или с некоторой степенью точности методом разделения переменных. Для описания последнего метода ограничимся случаем, когда $m_2=0$, а $\alpha=\text{const}$ и $\sigma=\text{const}$. Тогда формула (5.6.3) примет вид ($\mu=0$):

$$z_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \int_0^t \left(\dot{\theta} + \frac{i}{2\alpha} \ddot{\theta} \right) \exp i\omega_{1,2}(t-\tau)\, dt.$$

Оценим по величине член $\frac{1}{2\alpha} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}$. Имеем:

$$\dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{v};$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{v^2}\dot{v} + \frac{g\sin\theta\dot{\theta}}{v} = -gb\cos\theta + \frac{g\sin\theta}{v}\dot{\theta} - \frac{g^2\sin\theta\cos\theta}{v^2};$$

$$\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} = \frac{\pi}{\eta}\frac{Cv_0}{Ad},$$

где

$$b = 0{,}48\cdot 10^{-3}\frac{i}{C_q d}\Delta(y)\, c_x\left(\frac{v}{a}\right) \approx \text{const};$$

$$\dot{v} = -bv^2 - g\sin\theta.$$

Итак,

$$\frac{\ddot{\theta}}{2\alpha\dot{\theta}} = 0{,}48\cdot 10^{-3}\Delta(y)\, c_x\left(\frac{v}{a}\right)\frac{\eta i A}{2\pi C_q C}.$$

Пусть $\Delta(y)=1$; $c_x=0{,}3$; $\eta=40$; $i=1$; $\frac{A}{C}=10$; $C_q=10$, тогда

$$\frac{\ddot{\theta}}{2\alpha\dot{\theta}} = 0{,}48\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3\,\frac{40\cdot 10}{\pi 2\cdot 10} = 0{,}00092,$$

т. е. величина этого члена настолько мала, что им можно пренебречь. Таким образом, имеем

$$z_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \int_0^t \dot{\theta}(\tau)\, e^{i\omega_{1,2}(t-\tau)}\, dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$i\int_0^t \dot{\theta}(\tau)\, e^{i\omega_{1,2}(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{\omega_{1,2}}\int_0^t \dot{\theta}(\tau)\, d\left[e^{i\omega_{1,2}(t-\tau)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\omega_{1,2}}\,\dot{\theta}\left(e^{i\omega_{1,2}t} - 1\right) + \frac{1}{\omega_{1,2}}\int_0^t \ddot{\theta}(\tau)\, e^{i\omega_{1,2}(t-\tau)}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega_{1,2}}\,\dot{\theta}\left(e^{i\omega_{1,2}t} - 1\right) - \frac{1}{\omega^2_{1,2}}\,\ddot{\theta}\left(e^{i\omega_{1,2}t} - 1\right) + \frac{1}{\omega^2_{1,2}}\int_0^t \dddot{\theta}\, e^{i\omega_{1,2}(t-\tau)}\, dt.$$

Этот процесс можно продолжать, раскладывая решения в ряд по малому параметру $\frac{1}{\omega_{1,2}}$. Учитывая, однако, что $\omega_{1,2} = \alpha(1 \pm \sqrt{\sigma})$, по ранее вычисленному значению $\frac{\ddot{\theta}}{2\alpha\dot{\theta}}$ видим, что уже второй член является пренебрежимо малым. Окончательно имеем

$$z_1 = \pm\frac{i}{\omega_{1,2}\sqrt{\sigma}}\,\dot{\theta}\left(1 - e^{i\omega_{1,2}t}\right) = \frac{2i\alpha}{m_1}\,\dot{\theta} \mp \frac{i\dot{\theta}}{\omega_{1,2}\sqrt{\sigma}}\, e^{i\omega_{1,2}t}.$$

Разделив переменные, после элементарных преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} \delta_y &= \frac{2\alpha\dot{\theta}}{m_1} - \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{1}{\omega_1}\cos\omega_1 t - \frac{1}{\omega_2}\cos\omega_2 t\right); \\ \delta_z &= \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t - \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.4)$$

Под действием силы тяжести динамическая ось равновесия, около которой происходит прецессионное движение, отклоняется от вектора скорости вправо на угол

$$\delta_p = -\frac{2\alpha\dot{\theta}}{m_1} = \frac{2g\alpha\cos\theta}{m_1 v}. \qquad (5.6.5)$$

Произведение $m_1 v$ примерно пропорционально величине v^3, которая уменьшается по мере движения снаряда к вершине траектории, достигая минимума после вершины. Следовательно, угол δ_p достигает максимального значения в районе вершины. Отсюда условием устойчивости снаряда в вершине траектории является непревышение некоторого допустимого значения δ_{p_s}. Для артиллерийских снарядов обычно принимают $\delta_{p_s} \leqslant 10 \div 15°$.

5.7. ВЫБОР КРУТИЗНЫ НАРЕЗОВ

Нарезы в канале ствола служат для придания снаряду вращательного движения с целью стабилизации его в полете. Условие устойчивости снаряда, стабилизированного вращением, выражается неравенством

$$1 - \frac{m_1}{\alpha^2} > 0, \tag{5.7.1}$$

где

$$m_1 = \frac{d^2 h}{gA} 1000\, \Delta(y) \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} v^2 K_м\left(\frac{v}{a}\right);$$

$$\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A} = \frac{\pi}{\eta} \frac{Cv_0}{Ad};$$

η — длина шага нарезов в калибрах.

Для точки вылета $\Delta(y) = 1$, $v = v_0$, $K_м\left(\frac{v}{a}\right) = K_{м0}$, тогда отношение

$$\frac{m_1}{\alpha^2} = \frac{\eta^2}{\pi^2} \frac{hd^4}{gC} \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} \frac{A}{C} 1000\, K_{м0}. \tag{5.7.2}$$

Для тонкого цилиндра диаметром d полярный момент инерции выражается формулой

$$C = \frac{q}{4g} d^2.$$

Поскольку в снаряде или пуле масса распределена по сечению неоднородно, **их полярный** момент инерции имеет вид

$$C = \mu \frac{q}{4g} d^2.$$

Для снарядов коэффициент $\mu = 0{,}6$, для пуль (и сплошных снарядов) $\mu = 0{,}45$. Массу снаряда можно выразить через коэффициент массы C_q:

$$q = 1000\, C_q d^3,$$

следовательно,

$$C = 1000\, \mu \frac{C_q}{4g} d^5.$$

Подставляя это значение в соотношение (5.7.2) и учитывая условие (5.7.1), получим

$$\frac{m_1}{\alpha^2} = \frac{4\eta^2}{\pi^2}\,\frac{h}{d}\,\frac{A}{C}\,\frac{1}{\mu C_q}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,K_{M0} < 1.$$

Отсюда имеем

$$\eta < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d}\,\frac{A}{C}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,K_{M0}}}.$$

Если ввести коэффициент запаса устойчивости $\frac{m_1}{\alpha^2} = a^2 < 1$, то последняя формула приобретает вид

$$\eta = a\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d}\,\frac{A}{C}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,K_{M0}}}, \tag{5.7.3}$$

где

$$a = \sqrt{1-\sigma}.$$

В случае, когда стрельба ведется с носителя (например, самолета), движущегося со скоростью $v_н$, скорость снаряда относительно воздуха найдем по выражению

$$v_{01} = v_0 + v_н \cos\psi_н,$$

где $\psi_н$ — угол между направлением стрельбы и курсом самолета. Принимая $K_м(v_{01}) \approx K_м(v_0)$, получим

$$\eta = a\,\frac{v_0}{v_{01}}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d}\,\frac{A}{C}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,K_{M0}}}.$$

Учет движения носителя особенно важен при стрельбе из авиационных пушек по курсу вперед, так как скорость самолета $v_н = (0{,}2 \div 0{,}5)\,v_0$.

Рассмотрим условие устойчивости снаряда в вершине траектории

$$\delta_p = \frac{2g\alpha\cos\theta}{m_1 v} \leqslant [\delta_{ps}]_{доп}.$$

Подставляя значения α и m_1, имеем

$$\delta_p = \frac{\pi d\mu\, C_q g v_0 \cos\theta}{2\eta\,\frac{h}{d}\,\Delta(y)\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,v^3\,K_м\left(\frac{v}{a}\right)}. \tag{5.7.4}$$

Максимальное значение $\delta_{p\,max}$ приходится на вершину траектории, где $\cos\theta=1$, скорость v близка к v_{min}, а $\Delta(y)$ также имеет наименьшее значение.

По формуле (5.7.4) с уменьшением величины хода нарезов η угол динамического равновесия δ_p увеличивается. Отсюда следует, что условие устойчивости снаряда на криволинейном участке траектории противоречит условию устойчивости на начальном участке траектории (5.7.1). Увеличивая запас устойчивости в зависимости (5.7.3), мы тем самым ухудшаем устойчивость в вершине траектории. Однако даже при коэффициентах $a=0{,}95 \div 0{,}98$ удается обеспечить устойчивость снаряда в вершине лишь при углах бросания $\theta_0 \leqslant 60 \div 70°$. В случае необходимости вести огонь при бо́льших углах θ_0 применяют оперенные снаряды — мины.

5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО НАКЛОНА СОПЛ

Работа реактивного двигателя происходит на сравнительно коротком активном участке траектории. Условие устойчивости для этого участка согласно (5.3.7) записывается в виде

$$\sigma = 1 - \frac{m_1}{\dot{\nu}_1^2} > 0$$

или, с учетом коэффициента запаса устойчивости,

$$\frac{m_1}{\dot{\nu}_1^2} = a^2 < 1. \qquad (5.8.1)$$

Идеальным случаем было бы сохранение $a=\text{const}$ на всем участке траектории.

Рассмотрим подробно левую часть равенства (5.8.1). По определению имеем:

$$m_1 = \frac{d^2 h}{gA}\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,1000\,\Delta(y)\,v^2\,K_M\left(\frac{v}{a}\right);$$

$$\dot{\nu}_1 = \frac{C\dot{\varphi}_a}{2A},$$

где

$$v = v_0 + g\frac{P}{q_0}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{1+\mu}; \qquad \mu = \frac{\dot{q}}{q_0}\,t;$$

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_0 + M_p\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{C}.$$

Величины $(1+\mu)$ и C не пропорциональны между собой (изменение C зависит от конструкции заряда и $\frac{C_к}{C_0} \gg \frac{q_к}{q_0}$, где индексы к относятся к концу горения), поэтому соблюсти условие $a=\text{const}$ не удается. На практике, однако, бывает достаточным обеспечить устойчивость в начале и конце активного участка, чтобы ракета была устойчива во время работы двигателя.

Устойчивость ракеты в начале активного участка обеспечивается конструкцией направляющих и подсчитывается по формуле (5.3.7). Для обеспечения устойчивости в конце активного участка согласно условию (5.8.1) должно быть

$$\frac{d^2 h A_к}{g C_к^2} \frac{1000\,\Delta(y_к)\, v_к^2\, K_{мк}}{\dot{\varphi}_к^2} = a^2.$$

Отсюда найдем

$$\dot{\varphi}_к = \frac{1}{a} \frac{d}{C_к} \sqrt{\frac{h A_к}{g} 1000\,\Delta(y_к)\, K_{мк}}. \qquad (5.8.2)$$

С другой стороны

$$\dot{\varphi}_к = \dot{\varphi}_0 + \frac{M_р}{C_{ср}} (t_к - t_0).$$

Согласно формуле (1.9.3) имеем

$$M_р = P \frac{d_с}{2} \sin\gamma,$$

где γ — угол наклона сопл;
$d_с$ — радиус расположения осей сопл.
Следовательно, справедлива запись

$$\dot{\varphi}_к = \dot{\varphi}_0 + \frac{P}{C_{ср}} \frac{d_с}{2} (t_к - t_0) \sin\gamma,$$

откуда получим

$$\gamma = \arcsin \frac{2 C_{ср} (\dot{\varphi}_к - \dot{\varphi}_0)}{P d_с (t_к - t_0)},$$

где $\dot{\varphi}_к$ подсчитывается по уравнению (5.8.2).

После определения угла наклона сопл рекомендуется проверить устойчивость по формуле (5.8.1), определив значения m_1 и ν_1 численным методом по всему активному участку.

Глава VI

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В предыдущих главах движение центра масс и движение снаряда около центра масс рассматривались как независимые. Это существенно упростило решение основной задачи внешней баллистики, а задачу о движении около центра масс во многих случаях позволило исследовать в аналитическом виде. В настоящей главе проведем анализ влияния движения снаряда около центра масс на движение самого центра, что имеет прямое отношение к рассеиванию снарядов.

6.1. ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

В идеальном случае, когда канал ствола и снаряд выполнены с абсолютно точной осевой симметрией и ствол неподвижен относительно атмосферы, существует только один источник возникновения прецессионных движений — сила тяжести, искривляющая траекторию. Из зависимостей (5.6.4) и (5.6.5) следует, что сразу же после вылета снаряда из канала ствола возникают быстрая и медленная прецессии, вызывающие суммарный угол отклонения динамической оси равновесия

$$\delta_{p0} = \frac{2g\alpha \cos \theta_0}{m_1 v_0} . \qquad (6.1.1)$$

Оценим порядок этого угла, представив формулу (6.1.1) в таком виде:

$$\delta_{p0} = \frac{\alpha^2}{m_1} \frac{2g \cos \theta_0}{\alpha v_0} = \frac{\alpha^2}{m_1} \frac{2g\eta Ad \cos \theta_0}{\pi C v_0^2} . \qquad (6.1.2)$$

В расчетах примем: $\frac{m_1}{a^2}=0{,}8$; $\eta=40$; $\frac{A}{C}=10$; $v_0=860$ м/с; $d=7{,}62\cdot10^{-3}$ м; $\cos\theta_0=1$. Подставив эти значения в выражение (6.1.2), получим

$$\delta_{p0}=1{,}25\,\frac{2\cdot9{,}81\cdot40\cdot10\cdot7{,}62\cdot10^{-3}}{\pi\,860^2}=0{,}26\cdot10^{-4}=0{,}0015^\circ.$$

Отсюда следует, что для малокалиберного автоматического оружия угол δ_{p0} имеет небольшое значение. Кроме того, он всегда одинаков и вызывает систематическое отклонение пули вправо, которое может быть учтено в устройстве прицела.

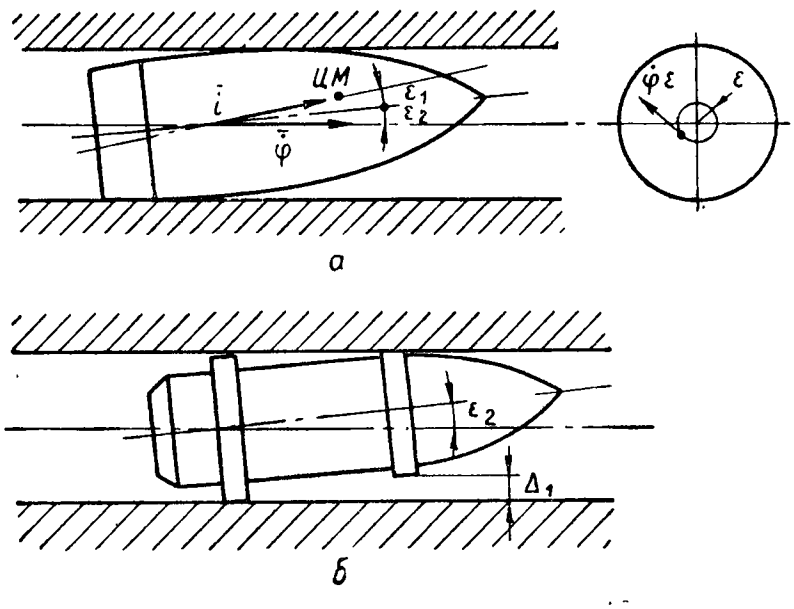


Рис. 29. Движение пули (а) и снаряда (б) в канале ствола

Рассмотрим основные причины возникновения начальной угловой скорости нутации.

В общем случае вследствие погрешностей изготовления пули, патронника, канала ствола главная центральная полярная ось инерции пули не совпадает с геометрической осью канала ствола, а составляет с ней некоторый угол ε (рис. 29, *а*), который складывается из двух углов:

ε_1 — между осью симметрии пули и ее центральной осью инерции, характеризующий динамическую неуравновешенность пули;

ε_2 — между геометрическими осями пули и канала ствола, образующийся при несимметричном врезании в нарезы. Для снарядов, кроме того, сюда же входит угол, возникающий за счет зазора Δ_1 (см. рис. 29, *б*), между верхним центрирующим утолщением и полями нарезов.

На величину угла ε наряду с технологическими допусками влияет также износ канала ствола и нагрев стенок.

Углы ε, ε_1 и ε_2 — малы, поэтому их можно рассматривать, как векторные величины $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_2$.

При движении снаряда (пули) по каналу ствола вектор угловой скорости вращения $\bar{\dot{\varphi}}$ направлен по геометрической оси канала. Конец единичного вектора $\bar{i}$, направленного по центральной оси инерции, описывает окружность радиуса $r=\sin\varepsilon\approx\varepsilon$. Очевидно, что угловая скорость прецессионного движения пули в канале ствола $\dot{\nu}=\dot{\varphi}$. Поэтому единичный вектор имеет угловую скорость

$$\omega = \dot{\varphi}\,\varepsilon\cos\varepsilon \approx \dot{\varphi}\varepsilon.$$

В момент вылета эта угловая скорость реализуется в начальную угловую скорость нутации $\dot{\delta}_0=\dot{\varphi}_0\varepsilon$, а угол ε — в начальный угол нутации ($\delta_0=\varepsilon$).

Пусть к моменту вылета плоскость сопротивления, т. е. в данном случае плоскость, проходящая через геометрическую ось канала ствола и главную полярную ось инерции снаряда, составляет с плоскостью бросания начальный угол прецессии ν_0. Тогда составляющие начальных параметров в координатах Крылова будут иметь значение (рис. 30):

$$\delta_{y0} = \varepsilon\cos\nu_0; \qquad \delta_{z0} = \varepsilon\sin\nu_0;$$

$$\dot{\delta}_{y0} = \dot{\varphi}_0\,\varepsilon\cos\nu_0; \qquad \dot{\delta}_{z0} = \dot{\varphi}_0\,\varepsilon\sin\nu_0.$$

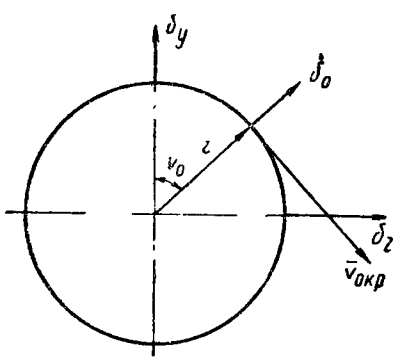


Рис. 30. К формированию начальных параметров выстрела

Вычислим при фиксированном значении угла ε величины коэффициентов в формулах (5.3.11) при $m_2=0$ и $\nu_0=0$:

$$B_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\sigma}}\sqrt{(\dot{\delta}_{y0}-\omega_2\delta_{z0})^2+(\dot{\delta}_{z0}+\omega_2\delta_{y0})^2} = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2a\sqrt{\sigma}}\sqrt{1+\frac{\omega_2^2}{\dot{\varphi}_0^2}};$$

$$B_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\sqrt{(\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0})^2 + (\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0})^2} = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{\dot{\varphi}_0^2}};$$

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{\dot{\delta}_{z0} + \omega_2\delta_{y0}}{\dot{\delta}_{y0} - \omega_2\delta_{z0}} = \frac{\omega_2}{\dot{\varphi}_0};$$

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = -\frac{\dot{\delta}_{z0} + \omega_1\delta_{y0}}{\dot{\delta}_{y0} - \omega_1\delta_{z0}} = -\frac{\omega_1}{\dot{\varphi}_0}.$$

Суммарный угол нутации согласно выражению (5.3.12) принимает максимальное значение при $\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \Delta_3) = -1$:

$$\delta_{max} = B_1 + B_2 = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_2^2}{\dot{\varphi}_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{\dot{\varphi}_0^2}}\right),$$

где

$$\omega_{1,2} = \alpha\left(1 \pm \sqrt{\sigma}\right).$$

Будем считать отношение $\frac{\omega_{1,2}}{\dot{\varphi}_0}$ малым, тогда

$$\delta_{max} = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\left(2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\dot{\varphi}_0^2}\right) = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}}\left(2 + \frac{2m_1}{\dot{\varphi}_0^2}\right) =$$

$$= \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{\alpha\sqrt{\sigma}}\left[1 + \frac{\alpha^2}{\dot{\varphi}_0^2}\left(\frac{m_1}{\alpha^2}\right)^2\right].$$

Поскольку $\frac{\alpha}{\dot{\varphi}_0} = \frac{C}{2A} \approx \frac{1}{20}$, а $\frac{m_1}{\alpha^2} = 0{,}7 \div 0{,}9$, то вторым членом в прямых скобках можно пренебречь. Исходя из происхождения этого члена, считаем угол δ_0 близким к нулю. Таким образом,

$$\delta_{max} = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{\alpha\sqrt{\sigma}} = \frac{2A\varepsilon}{C\sqrt{\sigma}}.$$

Принимая, что величина $\sqrt{\sigma}$ изменяется в пределах 0,45—0,70 и $\frac{A}{C} = 10$, получим

$$\delta_{max} \approx (30 \div 45)\,\varepsilon. \qquad (6.1.3)$$

Пример 1. Пуля калибра 7,62 мм при движении по каналу ствола испытывает биение носовой части по радиусу 0,10 мм. Точка, лежащая на пересечении осей канала ствола и пули, отстоит от вершины последней на расстоянии $l_1 \approx 27$ мм, центральная ось инерции проходит через ось симметрии пули. Найти значение максимального угла нутации.

Решение. Подсчитаем значение угла

$$\varepsilon = \frac{0,10}{l_1} = \frac{0,10}{27} = 0,0037.$$

Подставляя эту величину в формулу (6.1.3), найдем

$$\delta_{max} = 0,111 \div 0,166 = 6,5 \div 9,5°.$$

Такой результат позволяет считать основной причиной возникновения нутационных колебаний пули на траектории угловое отклонение центральной полярной оси инерции от геометрической оси канала ствола.

При стрельбе с подвижного объекта в направлении, не совпадающем с плоскостью его движения, так же, как и при боковом ветре, возникает начальный угол нутации (рис. 31)

$$\delta_{z0} = -\frac{W \sin \psi}{v_0}, \qquad (6.1.4)$$

где W — скорость ветра или скорость объекта-носителя;

ψ — угол между векторами скорости объекта-носителя и начальной скорости снаряда.

Формула (6.1.4) справедлива при малых значениях отношения $\frac{W}{v_0}$. В этом случае имеем:

$$B_1 = \frac{\omega_2 \delta_{z0}}{2\alpha \sqrt{\sigma}}; \qquad B_2 = \frac{\omega_1 \delta_{z0}}{2\alpha \sqrt{\sigma}};$$

$$\delta_{max} = B_1 + B_2 = \frac{\delta_{z0}}{\sqrt{\sigma}}.$$

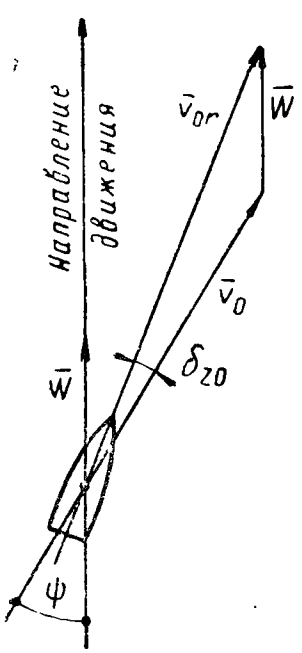


Рис. 31. Начальный угол нутации при стрельбе с объекта-носителя

Пример. 2. Определить начальный угол и максимальную амплитуду нутации, возникающей при стрельбе из пулемета бронетранспортера, движущегося со скоростью 72 км/ч под углом к направлению стрельбы $\psi = 70°$. Дополнительные исходные данные: $v_0 = 860$ м/с; $a = 0,9$.

Решение. Определяем:

$$\frac{m_1}{a^2} = a^2 = 0{,}81; \qquad \sqrt{\sigma} = \sqrt{1 - 0{,}81} = 0{,}45;$$

$$\delta_{z0} = \frac{W \sin \psi}{v_0} = \frac{20 \cdot 0{,}94}{860} = 0{,}022 = 1{,}25°;$$

$$\delta_{max} = \frac{\delta_{y0}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1{,}25}{0{,}45} = 2{,}8°.$$

Нутация происходит около вектора относительной скорости $\bar{v}_r$. Как видим, даже при стрельбе со сравнительно медленно движущихся объектов углы нутации достигают достаточно больших величин. При стрельбе с современных самолетов, скорость которых соизмерима со скоростями снарядов, эти углы могут достигать 40°. В этом случае начальный угол нутации должен быть вычислен по формуле

$$\delta_0 = \psi - \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \psi}{W + v_0 \cos \psi}.$$

Рассмотрим еще влияние радиального эксцентриситета на формирование начальных условий движения снаряда. В общем случае центр масс пули (снаряда) не совпадает с осью вращения его в канале ствола и находится от нее на некотором расстоянии Δ. Это происходит вследствие технологических погрешностей изготовления пули и несимметричности врезания ее в нарезы, которая зависит от технологических погрешностей изготовления как пули, так и пульного входа канала ствола. Угловой эксцентриситет (см. угол ε_2 на рис. 29, *а*) также способствует смещению центра масс снаряда относительно оси канала ствола.

При вылете из канала ствола (рис. 32) окружная скорость центра масс пули

$$v_{окр} = \dot{\varphi}_0 \Delta = \frac{2\pi v_0}{\eta d} \Delta.$$

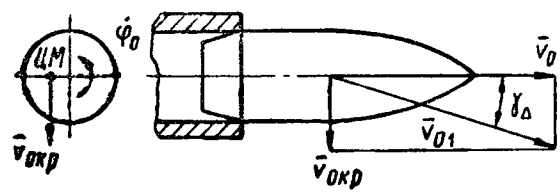


Рис. 32. К влиянию эксцентриситета центра масс пули на отклонение вектора начальной скорости

Наличие составляющей $v_{окр}$ вызывает отклонение вектора начальной скорости на угол

$$\gamma_\Delta = \operatorname{arctg} \frac{v_{окр}}{v_0} \approx \frac{2\pi\Delta}{\eta d}. \qquad (6.1{,}5)$$

Задавая для 7,62-мм пули: $\Delta=0{,}001$ мм; $\eta=40$, получим $\gamma_\Delta=0{,}206\cdot10^{-4}$. Таким образом, эксцентриситет центра тяжести пули в 1 мкм вызывает при стрельбе на 300 м отклонение точки попадания от расчетной

$$r_\Delta = 0{,}206\cdot10^{-4}\cdot300 = 0{,}618\cdot10^{-2} \approx 6{,}2 \text{ мм}.$$

Практически средняя величина эксцентриситета пуль составляет 5—9 мкм, что существенно влияет на кучность стрельбы.

6.2. ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС НА РАССЕИВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим систему первого приближения (2.5.2), положив для упрощения $\theta=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\dot\theta_1 v = \frac{g}{q} R_y \cos\nu; \qquad \dot\psi v = \frac{g}{q} R_y \sin\nu;\\ &\dot y_1 = \theta_1 v; \qquad \dot z_1 = \psi v, \end{aligned}\right\} \tag{6.2.1}$$

где

$$R_y = P\sin\delta + R_N = P\sin\delta + \frac{dl}{g}\,1000\,\Delta(y)\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,v^2 K_N\left(\frac{v}{a}\right)\delta.$$

В случае, когда $\delta_0=0$, можно использовать решение, полученное в координатах Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} &\nu = \nu_0 + \alpha t;\\ &\delta = \frac{\dot\delta_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}\sin\alpha\sqrt{\sigma}\,t, \end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}$$

где α, σ — постоянные величины.

Введем обозначение

$$m_N = \frac{dl}{q}\,1000\,\Delta(y)\,\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}\,v^2 K_N\left(\frac{v}{a}\right) = \text{const}, \tag{6.2.3}$$

так что $R_y = \frac{q}{g} m_N \delta$ (для простоты считаем, что $P=0$). Подставим выражения (6.2.2) и (6.2.3) в первые два уравнения системы (6.2.1), считая $\nu_0=0$ (это не скажется на общности результатов, так как при соответствующем выборе начальной плоскости отсчета угла прецессии всегда можно полагать $\nu_0=0$):

$$\left.\begin{aligned} &\dot\theta_1 = \frac{m_N}{v}\,\delta_{max}\sin\alpha\sqrt{\sigma}\;t\cos\alpha t;\\ &\dot\psi = \frac{m_N}{v}\,\delta_{max}\sin\alpha\sqrt{\sigma}\;t\sin\alpha t, \end{aligned}\right\} \tag{6.2.4}$$

где $\delta_{max} = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$ — максимальная амплитуда нутационных колебаний.

Интегрируя уравнения (6.2.4) при начальных условиях, когда $\theta_1(0)=0$, $\psi(0)=0$ ($v=\text{const}$), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{m_N}{2v}\delta_{max}\left[\frac{1-\cos\omega_1 t}{\omega_1} - \frac{1-\cos\omega_2 t}{\omega_2}\right] = \\
&= \frac{m_N}{2m_1 v}\delta_{max}\left(\omega_1\cos\omega_2 t - \omega_2\cos\omega_1 t - 2\alpha\sqrt{\sigma}\right); \\
\psi &= \frac{m_N}{2v}\delta_{max}\left[\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right] = \\
&= \frac{m_N}{2m_1 v}\delta_{max}(\omega_1\sin\omega_2 t - \omega_2\sin\omega_1 t),
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.5)$$

где

$$\omega_{1,2} = \alpha\left(1 \pm \sqrt{\sigma}\right).$$

Анализ полученных выражений показывает, что на начальном участке траектории, где ось снаряда описывает эпициклоиду около касательной, вектор ускорения от нормальной силы, вращаясь в плоскости, перпендикулярной к касательной, придает траектории движения центра масс спиралеобразный характер. При этом ось спирали составляет с траекторией невозмущенного движения (при $\delta=0$) угол γ_δ. Величина этого угла определяется постоянным членом в первой формуле (6.2.5):

$$\gamma_\delta = -\frac{m_N}{m_1 v}\dot{\delta}_0. \qquad (6.2.6)$$

Плоскость угла γ_δ совпадает с начальным положением плоскости сопротивления и в данном случае расположена вертикально, поскольку решение получено при $\nu_0=0$. Ввиду того, что начальный угол прецессии ν_0 случаен, положение плоскости угла γ_δ является произвольным в пределах от 0 до 2π. Знак минус в соотношении (6.2.6) указывает на смещение центра масс снаряда в случае $\nu_0=0$ в направлении отрицательной оси δ_y.

Найдем линейные перемещения центра масс снаряда в вертикальной и боковой плоскостях. Для этого подставим значения (6.2.5) в последние два (кинематические) уравнения (6.2.1):

$$\dot{y}_1 = \frac{m_N\delta_{max}}{2m_1}\left(-2\alpha\sqrt{\sigma} - \omega_2\cos\omega_1 t + \omega_1\cos\omega_2 t\right);$$

$$\dot{z}_1 = \frac{m_N \dot{\delta}_{max}}{2m_1} (\omega_1 \sin \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_1 t).$$

Интегрируя при начальных условиях $y_1(0)=0$, $z_1(0)=0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_N \dot{\delta}_{max}}{2m_1} \left(-2\alpha \sqrt{\sigma}\, t - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right); \\ z_1 &= \frac{m_N \dot{\delta}_{max}}{2m_1} \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_1 t - 1 \right) - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \omega_2 t - 1 \right) \right]. \end{aligned}\right\} \quad (6.2.7)$$

Оценим величину непериодической и периодической составляющих движения центра масс.

Отклонение точки попадания от расчетной при учете влияния непериодической составляющей найдем по выражению

$$y_1 = \gamma_\delta x = \frac{m_N}{m_1 v} \dot{\delta}_0 x, \quad (6.2.8)$$

где x — дальность до цели.

Для винтовочной пули имеем: $d=7{,}62\cdot10^{-3}$ м; $\frac{l}{h}=3$; $v_0=860$ м/с; $(K_N/K_м)_{ср}=0{,}25$; $q=9{,}6\cdot10^{-3}$ кг; $A=7\cdot10^{-8}$ кгм·с^2.

Вычислим отношение

$$\frac{m_N}{m_1} = \frac{lg\, A K_N}{hqd K_м} = \frac{3\cdot9{,}81\cdot7\cdot10^{-8}}{9{,}6\cdot10^{-3}\cdot7{,}62\cdot10^{-3}} 0{,}25 = 0{,}0069.$$

Задаваясь средним значением $\dot{\delta}_0=25$ 1/с, найдем

$$\gamma_\delta = \frac{m_N \dot{\delta}_0}{m_1 v_0} = \frac{0{,}0069}{860} 25 = 2\cdot10^{-4}.$$

При стрельбе по вертикальной мишени на дальность 300 м отклонение y_1 составит 60 мм.

Оценим величину периодических членов уравнений (6.2.7). Это можно сделать, оценив амплитуду для постоянной составляющей

$$z_1 = \frac{m_N}{2m_1} \dot{\delta}_{max} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \frac{m_N}{m_1} \frac{\dot{\delta}_{max}}{m_1} 2\alpha^2 \sqrt{\sigma}.$$

Пусть из условия устойчивости $\frac{m_1}{\alpha^2}=0{,}64$, тогда

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{1 - \frac{m_1}{\alpha^2}} = 0{,}6.$$

Используя данные последнего цифрового примера, вычислим

$$z_1 = \frac{0{,}0069\cdot1{,}2}{0{,}64} \dot{\delta}_{max} = 0{,}13\, \dot{\delta}_{max}.$$

Принимая $\delta_{max}=10°=0{,}1745$, получим

$$z_1 = 0{,}13 \cdot 0{,}1745 = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

т. е. z_1 пренебрежительно мала по сравнению с непериодической составляющей.

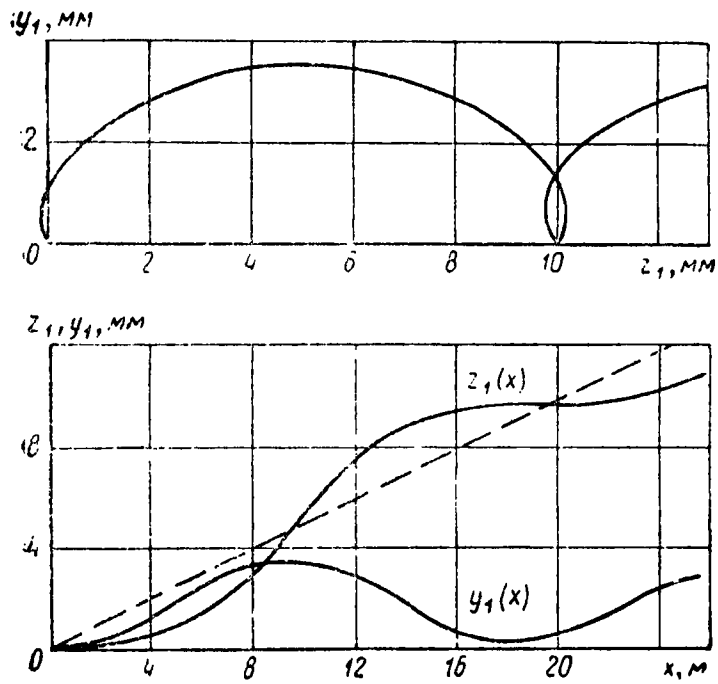


Рис. 33. Расчетные кривые движения центра масс винтовочной пули при $v_0=860$ м/с; $\eta=31{,}5$; $\dot{\delta}_0=30$ 1/с; $\nu_0=90°$

Кривые движения центра масс винтовочной пули $y_1(z_1)$, $z_1(x)$ и $y_1(x)$ показаны на рис. 33.

6.3. ВЛИЯНИЕ ЗАПАСА ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НА РАССЕИВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПУЛЬ

При исследовании этого вопроса будем принимать во внимание два основных фактора, влияющих на рассеивание траекторий: радиальный эксцентриситет центра тяжести Δ и колебательное движение пули около центра масс, вызванное нутационным толчком $\dot{\delta}_0$. Первый фактор вызывает отклонение точек попадания от расчетной точки (полученной без учета возмущающих факторов) согласно формуле (6.1.5):

$$r_\Delta = \gamma_\Delta x = \frac{2\pi}{\eta d} \Delta x. \qquad (6.3.1)$$

Второй фактор отклоняет точки попадания в соответствии с выражением (6.2.8) на величину

$$r_\delta = \gamma_\delta x = \frac{m_N}{m_1 v} \dot{\delta}_0 x. \qquad (6.3.2)$$

Величины r_Δ и r_δ не являются детерминированными, а изменяются от выстрела к выстрелу. Однако при анализе можно оперировать средними значениями параметров. Кроме того, считая составляющие рассеивания независимыми, можно найти суммарное отклонение как среднее квадратическое

$$r = \sqrt{r_\Delta^2 + r_\delta^2}\,.$$

Подставляя сюда значения величин (6.3.1) и (6.3.2), получим

$$r = x \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\eta d}\Delta\right)^2 + \left(\frac{m_N}{m_1}\frac{\dot{\delta}_0}{v}\right)^2}$$

Первый член в этой формуле уменьшается с увеличением шага нарезов η, второй — не зависит от него. Таким образом, с увеличением параметра η следует ожидать уменьшения рассеивания пуль. Однако, как следует из классической теории устойчивости, шаг нарезов не должен быть больше предельного значения $\eta_{пр}$, при котором $\sigma = 0$, поскольку в отрицательной области значений σ снаряд гироскопически неустойчив и углы нутации возрастают неограниченно. На самом деле в области $\sigma \leqslant 0$ нутационные колебания носят гармонический характер, но с более интенсивным ростом их амплитуды; характерным является также увеличение периода колебаний.

Практика показывает, что хорошая кучность стрельбы из винтовки может быть обеспечена, когда $\sigma = -0{,}05$, однако углы нутации при этом достигают значения 8—10°, что не всегда приемлемо. Кроме того, необходимо учесть, что на величину коэффициента устойчивости $\sigma = 1 - \frac{m_1}{\alpha^2}$ в большой степени влияют метеорологические условия стрельбы: температура и барометрическое давление. Так, например, отношение $\frac{\rho_0}{\rho_{oc}}$, входящее в выражение для m_1, при $t_0 = -50°$ С, $p_0 = 780$ мм рт. ст. имеет величину

$$\frac{\rho_0}{\rho_{oc}} = \frac{p_0}{p_{oc}} \frac{T_{oc}}{T_0} = \frac{780}{760} \frac{288{,}9}{223} = 1{,}33,$$

что ведет к значительному снижению запаса гироскопической устойчивости и, следовательно, к повышенному рассеиванию траекторий.

Поэтому, принимая в качестве предельного значения $\sigma=0$, можно рекомендовать введение коэффициента запаса $a=\sqrt{\frac{\rho_{oc}}{\rho_0}}$.

В общем случае выбор наивыгоднейшего шага нарезов ствола зависит от конкретного соотношения параметров Δ и δ_0 для данной системы ствол—пуля. При стрельбе из одного ствола различными видами боеприпасов расчет ведется для наихудшего по устойчивости варианта.

6.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕРИВАЦИИ

В параграфе 5.6 установлено, что движение снаряда происходит около динамической оси равновесия, отклоненной вправо от вектора скорости на угол δ_p (5.6.5). Следовательно, возникает нормальная сила, действующая по оси OZ, отклоняющая снаряд вправо от плоскости бросания. Это отклонение, называемое деривацией, является следствием действия силы тяжести на движение центра масс снаряда.

Поскольку деривация вычисляется интегрированием действия нормальной силы по всей траектории, то во многих случаях приходится учитывать и непостоянство коэффициента $\alpha=\frac{C\dot{\varphi}}{2A}$. Переменную угловую скорость $\dot{\varphi}$ снаряда можно получить интегрированием уравнения его вращательного движения около продольной оси в координатах Эйлера:

$$C\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\nu}\cos\delta)=M_г,$$

где

$$M_г=-\frac{d^3l}{g}1000\,\Delta(y)\,vK_г\left(\frac{v}{a}\right)\dot{\varphi}.$$

Так как величина угла δ для устойчивых снарядов мала, то $\cos\delta\approx 1$ и $\dot{\varphi}+\dot{\nu}=\dot{\varphi}_0$ — угловая скорость снаряда в абсолютном движении.

Считая величину

$$\frac{d^3l}{gC}1000\,\Delta(y)\,vK_г\left(\frac{v}{a}\right)=m_з=\text{const},$$

после интегрирования получим

$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0 e^{-m_з t}.$$

В первом приближении можно принять рекомендованное некоторыми авторами значение

$$m_з = 0{,}075\,\frac{ld^3}{C}\,.$$

Далее имеем

$$\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A}\,e^{-m_з t} = \frac{\pi}{\eta}\,\frac{Cv_0}{Ad}\,e^{-m_з t}.$$

Боковое отклонение определяется следующими уравнениями, полученными из системы (2.5.2) при $\nu = \pi/2 = \text{const}$, $v\cos\theta = u$:

$$\dot{\psi}u = \frac{g}{q}\,R_y; \quad \dot{z} = \psi u.$$

Исключив из этих равенств ψ, получим

$$u\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{u}\right) = \frac{g}{q}\,R_y.$$

Отсюда после двойного интегрирования найдем

$$z = \frac{g}{q}\int_0^t u\,dt\int_0^t \frac{R_y}{u}\,dt, \tag{6.4.1}$$

где

$$R_y = P\delta_р + R_N;$$

$$R_N = \frac{dl}{g}\,1000\,\Delta(y)\,v^2\,K_N\left(\frac{v}{a}\right)\delta_р.$$

Интегралы в уравнении (6.4.1) берутся численно. Для снарядов постоянной массы ($P=0$) после подстановки значения $\delta_р$ по формуле (5.6.5) уравнение (6.4.1) приводится к следующему виду

$$z = \frac{\pi g}{2}\,\frac{\mu l v_0}{\eta h}\int_0^t u\,dt\int_0^t \frac{K_N}{K_м}\,\frac{e^{-m_з t}}{v^2}\,dt.$$

Это решение также осуществляется численным методом.

Для оценки величины деривации имеются различного рода приближенные теоретические и экспериментальные формулы. Например, для автоматического оружия, стрельба из которого ведется настильными траекториями, можно применять:

$$\frac{K_N}{K_м} \approx \frac{1}{5}\,; \quad v \approx u = v_{ср}; \qquad m_з = 0; \qquad t = \frac{x}{v_{ср}}\,,$$

тогда получим

$$Z = \frac{\pi g \mu l v_0}{20 \eta h v_{ср}^3} X^2.$$

Пример. Оценить величину деривации при стрельбе из 7,62-мм пулемета на дальность 1200 м при следующих данных: $\mu = 0{,}45$; $\frac{l}{h} = 3$; $\eta = 35$; $v_0 = 860$ м/с.

Решение. Использовав вычисленное в примере параграфа 4.4 для винтовочной пули значение величины $b = 1{,}03 \cdot 10^{-3}$, определим

$$v_{ср} = \frac{v_0}{1 + \frac{1}{2} bX} = \frac{860}{1 + 0{,}5 \cdot 1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 1200} = 532 \text{ м/с}.$$

Подсчитаем ориентировочную величину деривации

$$Z = \frac{\pi g \, 0{,}45 \cdot 3 \cdot 860}{20 \cdot 35 \cdot 532^3} 1200^2 = 0{,}248 \text{ м}.$$

Эта величина учитывается автоматически специальным устройством прицела.

Глава VII

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

Внешнебаллистические испытания в зависимости от назначения можно подразделить на две основные группы — лабораторные и полигонные испытания.

Лабораторные испытания проводятся на специально оборудованных баллистических трассах открытого и закрытого (баровакуумного) типов. На этих испытаниях определяют:

— скорости пули (снаряда) в одной или нескольких точках траектории;

— аэродинамические характеристики натурных образцов и моделей;

— характеристики устойчивости и динамических качеств натурных образцов и моделей;

— характеристики рассеивания точек попадания.

Стрельбы в лабораторных условиях могут проводиться как из специальных баллистических установок, так и из различных видов стрелкового и артиллерийского вооружения.

На полигонных стрельбах из артиллерийских орудий и стрелкового оружия обычно определяют дальности стрельбы, начальные скорости снарядов (пуль) и характеристики рассеивания точек попадания. При проведении стрельб из нарезного оружия может предусматриваться также опытное определение деривации. Каждый вид перечисленных полигонных работ может проводиться самостоятельно в процессе создания и отработки конкретного образца оружия или комплексно при окончательных испытаниях и проведении работ по составлению таблиц стрельбы.

При проектировании снарядов, выборе наивыгоднейшей аэродинамической формы, наряду с баллистическим методом широко применяются продувки в аэродинамических трубах. Этот метод эффективен при сравнительных оценках влияния различных конструктивных параметров снаряда на его аэродинамические характеристики.

7.1. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СНАРЯДОВ И ПУЛЬ НА БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ТРАССЕ

Методы измерения скорости движения в воздухе можно разделить на две группы: прямые и косвенные. Прямые методы основаны на измерении времени t прохождения телом участка трассы определенной длины l (базы). В этом случае, допуская линейное изменение скорости, рассчитывают ее значение по формуле $v = \frac{l}{t}$. Найденную скорость относят к точке, которая совпадает с серединой измеряемого участка, т. е. регистрируют среднее значение скорости на блокируемом участке траектории. Для уменьшения погрешностей, вызываемых осреднением скорости, длину базы l выбирают возможно более малой, насколько это позволяет точность измерения временных интервалов.

Косвенные методы основаны на регистрации эффектов, проявление которых находится в прямой зависимости от величины скорости. Например, зарубежные исследователи предложили пускать модель параллельно пластинке с отверстиями диаметром 1,5 мм, составляющими цепочку с шагом 6,4 мм по направлению траектории. По мере попадания головной ударной волны модели в отверстия каждое из них последовательно становится источником сферических волн. Согласно принципу Гюйгенса, огибающая вторичных волн будет указывать на положение волнового фронта. Так как угол наклона огибающей приблизительно равен углу Маха, то после его измерения по теневым фотографиям и введения небольших поправок на дифракцию может быть вычислена скорость модели с точностью в несколько процентов.

К косвенным методам следует также отнести метод определения скорости пули в заданной точке траектории, часто использовавшийся ранее в экспериментальной баллистике. В этом методе применяется баллистический маятник — массивная стальная плита, подвешенная на шарнирах за верхний край перпендикулярно к линии стрельбы. При встрече пули с маятником последний отклоняется на определенный угол. По величине этого угла находят скорость пули в заданной точке траектории. При этом исходят из предположения, что вся кинетическая энергия движения пули полностью переходит в работу на перемещение маятника, т. е. тепловые и другие потери не учитываются. Точность определения скорости таким методом невелика, кроме того, этот метод не может быть использован при стрельбе снарядами и пулями больших калибров.

Для ракет и крупнокалиберных снарядов часто применяется метод непрерывного определения скорости, при котором внешнетраекторные измерения осуществляются с помощью наземной оптической и радиолокационной аппаратуры.

Наиболее распространенным в практике баллистических стрельб является метод определения средней скорости. Измери-

тельная аппаратура при этом методе состоит из датчиков регистрации моментов пролета тела в некоторых сечениях трассы — блокирующих устройств (БУ); усилителя — преобразователя сигналов (УПС), поступающих с БУ; измерителя интервалов времени (ИИВ), пуск и останов счетного устройства которого осуществляется по сигналам, поступающим с УПС. Блок УПС не всегда является самостоятельным элементом, а может входить в состав БУ или ИИВ.

БЛОКИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Наиболее простым и надежным средством регистрации моментов пролета издавна являются механические контактные системы типа рам-мишеней. Световые, магнитные, электростатические, акустические и радиолокационные блокирующие устройства появились значительно позднее.

Рама-мишень (рис. 34) представляет собой плоскую раму (обычно квадратную), размеры которой зависят от условий стрельбы. На раму наматывается (изолированно от нее) тонкая проволока диаметром 0,20—0,25 мм (мишура). Для повышения надежности разрыва намотка проволоки ведется с натягом. Расстояние между соседними витками не должно превышать одной четверти калибра исследуемого тела. В некоторых случаях проволоку или металлическую фольгу наклеивают на непроводящий материал (бумагу, пленку). Рамы-мишени на трассе устанавливают так, чтобы их плоскости были перпендикулярны к траектории движущегося тела. По цепям рам-мишеней пропускают постоянный ток. При разрыве любой из проволочек на входе УПС появляется сигнал, регистрирующий момент пролета телом плоскости рамы. Иногда используется схема включения на замыкание. В этом случае перпендикулярно к линии выстрела устанавливают раму с двумя листами фольги, между которыми находится изоляционный материал. Замыкание цепи производится летящим металлическим телом.

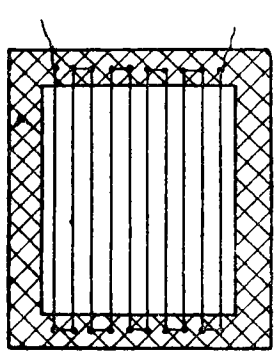


Рис. 34. Проволочная рама-мишень

Удобство применения рам-мишеней заключается в том, что они не чувствительны ни к механическим, ни к электрическим помехам и легко могут перекрывать большие плоскости. К тому же они применимы при любых скоростях, для светящихся и несветящихся тел.

Недостатком этих систем является неопределенность момента разрыва, который может быть произведен как головной, так и хвостовой частью модели, а также вследствие растяжения проволоки. Если модель металлическая, то после разрыва проволоки головной частью замыкание может происходить через модель. Рама-мишень не может быть выставлена на траектории с большой точностью по координате. Восстановление рамы-мишени нужно производить после каждого выстрела, что препятствует автоматизации процесса измерения скорости. Удар модели о проволоку с большой скоростью может вызвать повреждение ее поверхности, а также усиленное нутационное движение модели, что не всегда желательно.

На учебных лабораторных трассах часто в качестве конечного на трассе блокирующего устройства используют инерционные элементы. Конструкции инерционных БУ различны. Наиболее типичным является «контактный стаканчик» (рис. 35), который укрепляется на фанерном или металлическом листе *1*. При ударе пули в лист контактный стержень *2* на мгновение отскакивает от стенки стаканчика *3* и размыкает цепь. Возникающий сигнал служит для останова счетного устройства ИИВ. Достоинство такого элемента в самовосстановлении цепи после каждого выстрела.

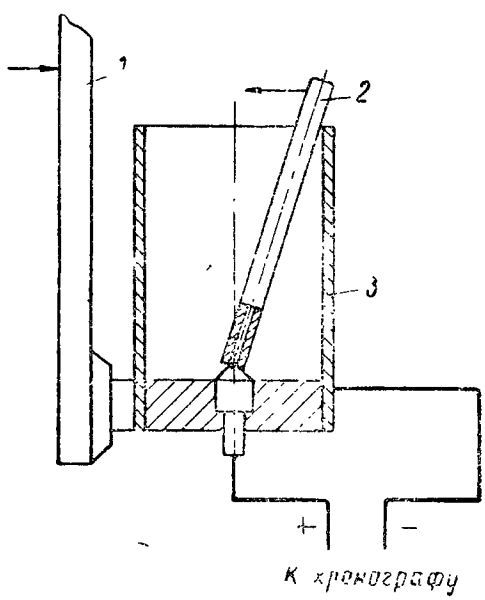


Рис. 35. Инерционное блокирующее устройство типа «контактный стаканчик»:
1 — лист; *2* — стержень; *3* — стенка

В настоящее время в качестве БУ широкое распространение получили бесконтактные датчики. Такие датчики не оказывают влияния на движение тел, не требуют восстановления, что позволяет автоматизировать процесс измерения скорости.

Наиболее перспективной по точности измерения и надежности работы является световая (фотоэлектрическая) система регистрации моментов пролета тел. Принцип построения таких систем блокировки основан на модуляции светового потока, падающего на чувствительный к освещению элемент, при прохождении телом световой плоскости.

Фотоэлектрическая система блокировки (рис. 36) включает источник света S, питаемый постоянным током, коллиматоры K_1, K_2 и фоторегистратор $Ф$. Коллиматор K_1 состоит из сферической или цилиндрической линзы L_1 и системы щелевых диафрагм D_1, формирующих световую плоскость. В коллиматоре K_2 с помощью более узких щелей вырезается центральная зона, высота и ширина которой определяют область регистрации пролета тел. Вторая конденсорная линза L_2 фокусирует свет на фоторегистратор $Ф$, в качестве которого могут использоваться фотодиоды, фоторезисторы и фотоэлектронные умножители (ФЭУ). При проведении экспериментов с моделями малого удлинения и при больших скоростях предпочтительными являются ФЭУ, обеспечивающие высокую скорость нарастания выходного сигнала.

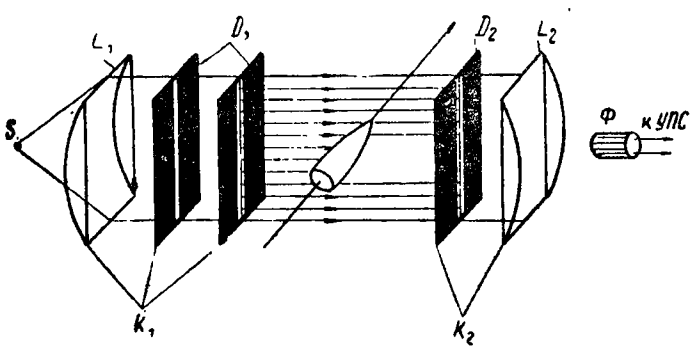


Рис. 36. Фотоэлектрическая система блокировки

Полет тела с гиперзвуковыми скоростями сопровождается интенсивным свечением газа. В этом случае в системе регистрации моментов пролета отсутствуют осветители, так как собственное свечение газа с помощью коллиматора может быть направлено непосредственно на катод ФЭУ.

В тех случаях, когда возникает необходимость в создании фотоэлектрического барьера большой высоты при сохранении высокого коэффициента чувствительности, пользуются специальными системами построения световой плоскости с помощью светового пучка, многократно отраженного от зеркал с поверхностным покрытием, или с помощью нескольких осветителей и соответствующего числа фоторегистраторов.

В экспериментальной баллистике часто применяется также электромагнитная система регистрации пролета тел (рис. 37), чувствительным элементом которой является соленоид с двумя обмотками, помещенными в металлическом кожухе. Одна обмотка соленоида питается постоянным током, создавая постоянный магнитный поток, что необходимо для подмагничивания и повышения чувствительности датчика. При прохождении внутри соленоида

металлического тела, обладающего магнитными свойствами, во второй (рабочей) обмотке соленоида появляется э. д. с. Поскольку полученный сигнал слабый, он подается для усиления и формирования в блок УПС. Недостатком соленоидных датчиков является относительно невысокая крутизна фронтов генерируемых импульсов, вследствие чего затрудняется формирование сигналов с большим временным разрешением. Кроме того, применение такой схемы требует при проведении стрельб подмагничивания снарядов.

Для того, чтобы избежать предварительного подмагничивания, а также в случае, когда материал натурных образцов и моделей является диамагнетиком, эффективно используют индукционные датчики с модуляцией постоянного тока. В схеме такого датчика при пересечении снарядом (пулей) постоянного магнитного потока происходит изменение тока, проходящего через катушку. Полученный сигнал после формирования подается на ИИВ.

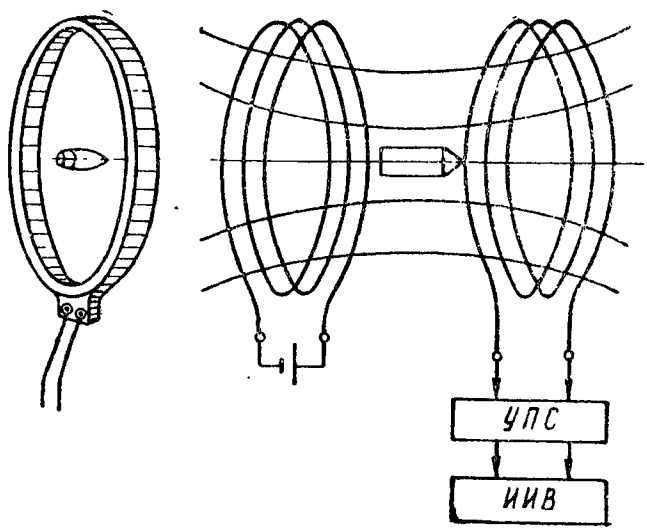


Рис. 37. Электромагнитная система блокировки с применением соленоидов

В качестве электростатического датчика регистрации момента пролета может быть использован конденсатор с отверстиями в обкладках, через которые (в направлении, перпендикулярном к обкладкам) пролетает модель. На обкладках конденсатора при этом вырабатывается определенный сигнал.

Бесконтактная регистрация моментов пролета может быть успешно осуществлена с помощью акустических датчиков. Эти датчики реагируют на головную баллистическую волну, сопровождающую модель, движущуюся в воздухе со сверхзвуковой скоростью. Они должны обладать малой инерционностью и высокой чувствительностью. Этим требованиям вполне удовлетворяют пьезоэлектрические датчики давления ПД (рис. 38), работающие по принципу «акустического стержня». Чувствительным элементом такого датчика является пьезоэлемент. При воздействии импульс-

ного давления на воспринимающую поверхность пьезоэлемента возникает электрический сигнал, по которому осуществляется пуск или останов счетного устройства ИИВ. В качестве акустических

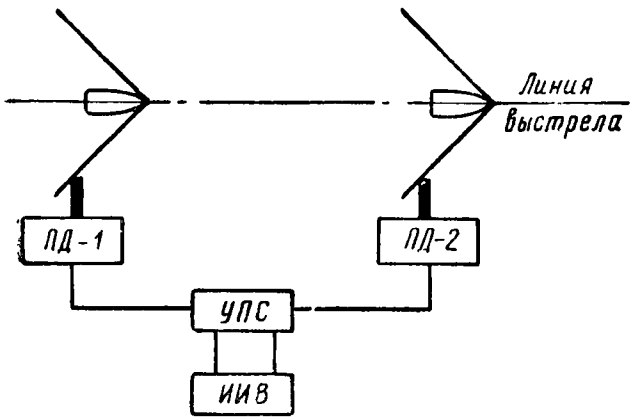


Рис. 38. Схема определения скорости снаряда с помощью пьезоэлектрических датчиков, регистрирующих баллистическую волну

датчиков используются также некоторые типы конденсаторных микрофонов. Этот метод нельзя использовать при дозвуковых скоростях движения снарядов.

ИЗМЕРИТЕЛИ ИНТЕРВАЛОВ ВРЕМЕНИ

В качестве ИИВ в экспериментальной баллистике используются различные виды хронографов, хронометров, частотомеров и осциллографов.

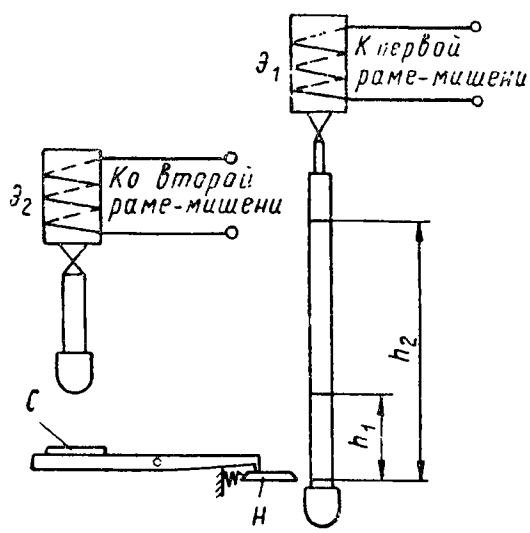


Рис. 39. Принцип работы хронографа Ле-Буланже

Длительное время для определения скорости снаряда (пули) применялся (иногда и сейчас применяется) хронограф системы Ле-Буланже (рис. 39), изобретенный в 1864 г. Он представляет собой установленную на массивном основании колонку, на которой укреплены два электромагнита $Э_1$ и $Э_2$. К сердечникам электромагнитов подвешиваются два стержня: длинный, называемый хронометром, и короткий — отмечатель. В электрические цепи

обоих электромагнитов, питаемых постоянным током, включены рамы-мишени. При прорыве первой рамы-мишени ток в цепи электромагнита прерывается и хронометр начинает падать. При прорыве второй рамы-мишени падает отмечатель и ударяет в плечо спускового механизма *С*. Последний освобождает нож *Н*, который под действием пружины ударяет по хронометру и на высоте h_2 оставляет на нем метку.

Пренебрегая влиянием сопротивления воздуха, можно записать, что время падения хронометра

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$

Из него необходимо вычесть время запаздывания t_1, т. е. время от начала падения отмечателя до получения метки на хронометре. Для определения этого времени с помощью специального прибора (разобщителя) размыкают одновременно обе цепи. При этом получают на трубке хронометра метку на высоте h_1. Тогда время запаздывания

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Для хронографов на практике обычно принимают $t_1 = 0{,}15$ с, что соответствует высоте запаздывания $h_1 = 110{,}4$ мм. Эта высота регулируется при помощи микрометрического винта, передвигающего электромагнит $Э_2$ по колонке.

Время полета снаряда (пули) на заблокированном участке траектории найдем по выражению $t = t_2 - t_1$.

Основные достоинства описанного хронографа — простота и надежность работы. Средняя ошибка в определении скорости не превышает 0,1%. Однако хорошую точность этот прибор обеспечивает только при измерении интервалов времени порядке 0,1 с. При $t < 0{,}05$ с точность измерения резко падает. В связи с этим база, на которой установлены рамы-мишени, при использовании данного прибора весьма велика и примерно равна 0,1 от предполагаемой начальной скорости.

В настоящее время на баллистических трассах в основном применяются электронные хронометры, работающие по принципу сравнения измеряемых промежутков времени с суммой периодов колебаний высокочастотного кварцевого генератора электрических колебаний. В таком хронометре КГВЧ (рис. 40) непрерывно вырабатывает электрические импульсы определенной частоты f (с периодом $T = 1/f$). Однако эти импульсы на ЭСУ не поступают. При прохождении моделью первого блокирующего устройства БУ-1 возникает сигнал, идущий сначала на УПС, а затем (после формирования) и на быстродействующий ЭП, который по полученному сигналу начинает пропускать импульсы от КГВЧ на ЭСУ,

подсчитывающее количество поступивших импульсов. По сигналу второго блокирующего устройства БУ-2 вновь срабатывает ЭП, отключая при этом КГВЧ от ЭСУ. Таким образом, за время движения модели на участке траектории между БУ-1 и БУ-2 на блок ЭСУ поступает определенное количество импульсов. Поскольку число периодов n известно, то искомое время найдется по формуле $t=nT$.

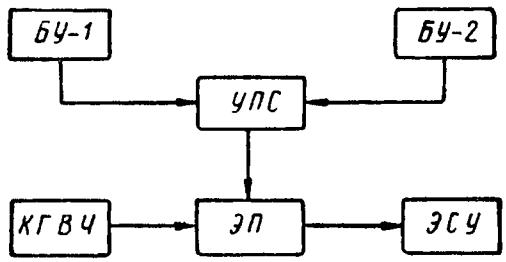


Рис. 40. Блок-схема работы электронного хронометра:
ЭП — электронный переключатель; КГВЧ — кварцевый генератор высокой частоты; ЭСУ — электронное счетное устройство

Относительная погрешность измерения интервалов времени зависит от относительной погрешности частоты КГВЧ, измеряемого интервала времени и частоты заполнения. Например, применительно к частотомеру Ч3-33 относительная погрешность измерения интервалов времени подсчитывается (в процентах) по уравнению

$$\delta_\tau = \pm \left(\delta_0 + \frac{1}{f_0 \tau_x}\right) 100,$$

где δ_0 — погрешность частоты внутреннего кварцевого генератора или внешнего источника опорной частоты;
f_0 — частота заполнения, характеризующая точность измерения ($f_0=10$, 1 МГц; 100, 10, 1 кГц);
τ_x — измеряемый интервал времени.

Величина δ_0 очень мала и не превышает 0,0001%. Для $\tau_x=10^{-3}$ с при $f_0=10$МГц имеем $\delta_\tau=0{,}01\%$.

Для измерения в одном опыте большого числа непериодических интервалов времени используются многоканальные измерители времени, конструкция которых основана на применении электронно-лучевых трубок с круговой разверткой.

Длина измерительного участка выбирается исходя из требуемой точности определения скорости. Поскольку скорость находится по соотношению $v=\frac{l}{t}$, то наибольшая относительная погрешность при ее вычислении будет составлять величину

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta t}{t},$$

где $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{\Delta t}{t}$ — относительные ошибки в измерении l и t соответственно.

Обычно задается точность определения скорости v. Пусть $\frac{\Delta v}{v} \leqslant 0{,}2\%$. Допустим, что погрешность измерения длины участка l не превышает 0,1%, тогда относительная погрешность измерения времени должна быть $\frac{\Delta t}{t} \leqslant 0{,}1\%$. Отсюда имеем $t \geqslant \Delta t 10^3$. Исходя из этого минимального времени устанавливается база $l \geqslant vt$ или, в нашем случае,

$$l \geqslant 10^3 v \Delta t,$$

где v — предполагаемая скорость.

Для частного случая, когда применяется фотоблокировка, а в качестве ИИВ используется частотомер Ч3-33, получается максимальная ошибка $\Delta t = 10^{-6}$ с. Это значит, что при $v = 1000$ м/с $l = 1$ м. Знание величины l позволяет найти значение $\Delta l \leqslant 10^{-3} l$. Следовательно, в рассматриваемом случае допустимая ошибка Δl должна составлять не более 1 мм.

По своему характеру ошибка в измерении длины l является систематической. Ошибка в измерении времени t — случайная, а ее величина связана с крутизной нарастания сигнала, поступающего с БУ, и разбросом уровней срабатывания порогового устройства ИИВ. Поэтому наибольшую относительную ошибку в определении скорости дают контактные блокирующие устройства типа рам-мишеней. Наименьшую погрешность могут обеспечить фотоэлектрические БУ, выполненные с применением ФЭУ.

7.2. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ СТРЕЛЬБ

В полигонной практике для определения коэффициента сопротивления c_x обычно используется формула, полученная на основании закона изменения кинетической энергии. По этому закону величина изменения кинетической энергии материальной точки на каждом участке пути равна сумме работ всех сил, действовавших на точку на этом участке. Для прямолинейного горизонтального участка траектории уравнение кинетической энергии запишется в виде

$$\frac{m v_к^2}{2} - \frac{m v_н^2}{2} = -\int_0^x c_x \frac{\rho v^2}{2} S dx, \qquad (7.2.1)$$

где $v_н$ и $v_к$ — скорости в начале и конце участка траектории x; $c_x \frac{\rho v^2}{2} S = R_т$ — сила лобового сопротивления воздуха.

Вынесем выражение силы сопротивления воздуха из-под знака интеграла, заменяя его средним значением на участке x. После этого полагаем, что $c_x = \text{const}$ и что скорость на участке x остается постоянной величиной

$$v_{ср} = \frac{v_н + v_к}{2} .$$

Тогда уравнение (7.2.1) перепишется в виде

$$\frac{m}{2}(v_к^2 - v_н^2) = -c_x \frac{\rho S}{2} v_{ср}^2 x.$$

Подставляя сюда значения $v_{ср}$, получим

$$c_x = \frac{4m}{\rho S} \frac{(v_н - v_к)}{(v_н + v_к)} \frac{1}{x} . \qquad (7.2.2)$$

На практике используется зависимость

$$c_x = 5{,}09 \frac{q}{d^2 П_0 x} \frac{(v_н - v_к)}{(v_н + v_к)} ,$$

где $П_0 = g\rho_0$ — плотность воздуха в условиях эксперимента.

Таким образом, для вычисления коэффициента c_x необходимо определить скорость исследуемого тела в двух точках прямолинейной горизонтальной траектории. Длина измерительного участка x (рис. 41) должна выбираться так, чтобы оправдывалось осреднение величины $R_т$ и вместе с тем разница между $v_к$ и $v_н$ обеспечивала требуемую точность расчета значения c_x. На открытых трассах длина участка берется в пределах $x = 200 \div 400$ м, на закрытых — $x = 50 \div 100$ м в зависимости от величины скорости и применяемых типов блокирующих устройств и хронометров.

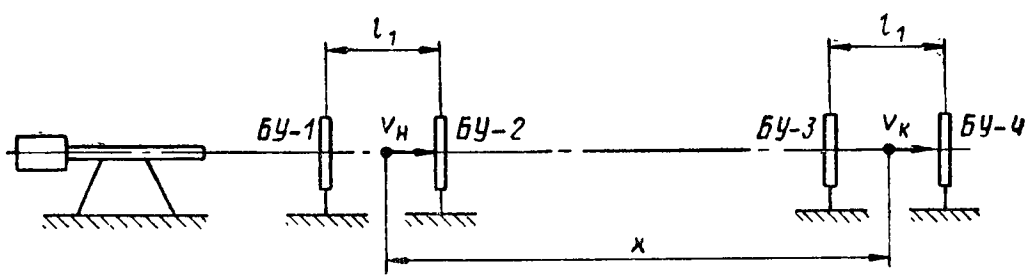


Рис. 41. К определению коэффициента сопротивления $c_x(v/a)$ методом баллистических стрельб

При этом методе определяется не сила сопротивления воздуха в какой-то точке, а ее среднее значение на некотором участке траектории, причем она относится к средней скорости $v_{ср}$ на данном участке, что также является источником ошибок. Более точен метод численного дифференцирования. При этом методе необходимо зафиксировать время полета тела от дульного среза до то-

чек траектории A_0, A_1, A_2,..., A_k, равноотстоящих друг от друга на расстоянии h. По результатам замеров определяют:

$$\Delta t_0 = t_1 - t_0;$$

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1;$$

. . . . . .

$$\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1},$$

где $t_0, t_1, t_2,..., t_k$ — времена полета тела до точек A_0, A_1,..., A_k соответственно.

Далее составляют таблицу $\Delta t = f_1(x)$ с шагом h. При помощи численного дифференцирования получают таблицу $\frac{dt}{dx} = f_2(x)$, а затем таблицу $v = f_3(x)$. Для определения силы сопротивления в точках A_0, A_1,..., A_k необходимо численно продифференцировать табличную функцию $v = f_3(x)$. По полученным значениям функции $\frac{dv}{dx} = f_4(x)$ можно составить таблицу значений $c_x = f_5(x)$. Для точки n имеем

$$c_{xn} = \frac{2m}{\rho S} \frac{1}{v_n^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)_n$$

или, учитывая, что

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \tag{7.2.3}$$

окончательно получим

$$c_{xn} = \frac{2m}{\rho S} \frac{1}{v_n} \left(\frac{dv}{dx} \right)_n.$$

Достоинство этого метода заключается в том, что в одном эксперименте определяется несколько значений c_x, причем для каждой фиксированной точки траектории имеется пара значений v_n и c_{xn}. Недостатком метода является его громоздкость и необходимость применения такой операции, как численное дифференцирование табличной функции, что может привести к значительным ошибкам.

Чтобы избежать численного дифференцирования, рассмотрим метод, основанный на интегрировании уравнений движения тела при некоторых допущениях в отношении аэродинамического коэффициента c_x.

Запишем уравнение движения тела на горизонтальном участке траектории в виде

$$m\frac{dv}{dt} = -c_x\frac{\rho v^2}{2}S.$$

Учитывая выражение (7.2.3), имеем

$$\frac{dv}{dx} = -c_x\frac{\rho v}{2m}S.$$

Для небольшого участка траектории можно считать $c_x = \text{const}$. Тогда, обозначив $b = \frac{S\rho}{2m}c_x$ и разделив переменные, получим

$$v_к = v_н e^{-bx}. \tag{7.2.4}$$

Откуда найдем

$$c_x = \frac{2m}{\rho S}\frac{1}{x}\ln\frac{v_н}{v_к}. \tag{7.2.5}$$

Эта формула точнее зависимости (7.2.2.), так как она выведена только при одном предположении, что $c_x = \text{const}$. Причем выражение (7.2.2) получим из формулы (7.2.5), если при разложении в ряд величины $\ln\frac{v_н}{v_к}$ сохраним лишь первый член.

Для определения коэффициента c_x может быть получена еще одна формула, не требующая знания скорости тела в двух точках траектории. С этой целью проинтегрируем уравнение (7.2.4) в предположении, что $b = \text{const}$ $(c_x = c_{x0})$:

$$v_н t = \frac{1}{b}(e^{bx} - 1)$$

или

$$e^{bx} = 1 + v_н bt. \tag{7.2.6}$$

Поскольку из этого выражения нельзя получить зависимость для точного определения b, разложим величину eb^x в ряд и, удерживая квадратичные члены, найдем

$$b = \frac{2(v_н t - x)}{x^2},$$

откуда

$$c_x = \frac{4m}{\rho S}\frac{(v_н t - x)}{x^2}. \tag{7.2.7}$$

Здесь значение c_x рассматривается как функция ряда независимых параметров, которые определяются опытным путем. Так, наряду с величинами m, ρ, S, должны быть измерены время t прохождения телом участка траектории x и начальная скорость тела $v_н$. Разность $(v_н t - x)$ является важной характеристикой движения. Она представляет собой отставание за время полета t тела, испытывающего сопротивление среды, от тела, скорость которого постоянна и равна $v_н$.

Решение (7.2.7) содержит две неизвестные величины: коэффициент c_x и начальную скорость $v_н$. В опытах по определению c_x начальная скорость $v_н$ не задана и не может быть непосредственно измерена, так как для этого требуется найти мгновенное значение скорости в точке. Измерение же скорости на конечном участке в случае больших величин b может привести к значительным ошибкам. Поэтому для неизвестных c_x и $v_н$ необходимо составить систему из двух алгебраических уравнений (7.2.6):

$$\left.\begin{aligned} 1 + v_н b t_1 &= e^{b x_1}; \\ 1 + v_н b t_2 &= e^{b x_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.8)$$

Эта система соответствует условиям опыта, когда измерение времени t происходит на двух базах неодинаковой длины, а начало отсчета берется от общей точки пространства. Начальная скорость $v_н$ в обоих случаях одинакова.

Умножим первое уравнение на t_2, а второе — на t_1, после вычитания второго из первого получим

$$\frac{t_2}{t_1} - 1 = \frac{t_2}{t_1} e^{x_1 b} - e^{x_2 b}.$$

Другую зависимость найдем вычитанием второго уравнения системы (7.2. 8) из первого:

$$v_н b (t_1 - t_2) = e^{x_1 b} - e^{x_2 b}.$$

Окончательно имеем новую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t_2}{t_1} - 1 &= \frac{t_2}{t_1} e^{x_1 b} - e^{x_2 b}; \\ v_н &= \frac{1}{b (t_1 - t_2)} (e^{x_1 b} - e^{x_2 b}). \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.9)$$

Она используется для определения значений c_x и $v_н$ по измеренным величинам t_1, t_2, x_1 и x_2 при известных параметрах модели m, S и плотности среды ρ.

Уравнения системы (7.2.9) можно решать независимо друг от друга, поскольку первое из них не содержит $v_н$. Первое уравнение нельзя так преобразовать, чтобы выразить величину c_x в явном виде, поэтому определить коэффициент сопротивления можно гра-

фическим или численным решением. Приближенное выражение для этого может быть найдено при разложении показательной функции в ряд. Удерживая в разложении только квадратичные члены, получим

$$c_x = -\frac{4m}{\rho S}\,\frac{\frac{t_2}{t_1}x_1 - x_2}{\frac{t_2}{t_1}x_1^2 - x_2^2}\,. \qquad (7.2.10)$$

При сохранении членов третьего порядка имеем

$$c_x = -\frac{4m}{\rho S}\,\frac{\frac{t_2}{t_1}x_1 - x_2}{\frac{t_2}{t_1}x_1^2 - x_2^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}x_1 - x_2\right)\left(\frac{t_2}{t_1}x_1^3 - x_2^3\right)}{\left(\frac{t_2}{t_1}x_1^2 - x_2^2\right)^2}\right].$$

Для подсчета коэффициента сопротивления должны быть известны следующие параметры: x_1, x_2, t_1, t_2, m, S и ρ. Поскольку измеряются эти параметры с некоторой погрешностью, зависящей от условий проведения эксперимента, величина c_x также будет определяться с погрешностью. Взяв приращения коэффициента сопротивления по различным параметрам формулы (7.2.10), получим:

$$\delta c_x|_m = \pm\frac{\delta m}{m}\,; \qquad \delta c_x|_\rho = \pm\frac{\delta\rho}{\rho}\,;$$

$$\delta c_x|_S = \pm\frac{\delta S}{S} = \pm 2\,\frac{\delta r}{r}\,.$$

Ошибка в значении c_x вследствие погрешности измерения расстояния Δx имеет вид

$$\delta c_x|_x = \pm\frac{1}{n(1-n)}\,\frac{\Delta x_1}{(v_н t_2 - x_2)}\,, \qquad (7.2.11)$$

где n — отношение меньшей измерительной базы к большей $\left(n = \frac{x_1}{x_2}\right)$;

Δx_1 — ошибка в измерении малой измерительной базы.

Выражение (7.2.11) принимает минимальное значение при $n=0{,}5$. Это необходимо иметь в виду при назначении баз.

Ошибку в определении значения c_x вследствие погрешности измерения времени Δt найдем по зависимости

$$\delta c_x|_t = \pm\frac{v_н}{n(1-n)(v_н t_2 - x_2)}\,\Delta t_1. \qquad (7.2.12)$$

Из формул (7.2.11) и (7.2.12) следует, что при заданной точности измерения расстояния необходимая точность измерения времени зависит от скорости движения тела, причем с увеличением се требования к точности измерения времени должны ужесточаться.

7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ И ОПРОКИДЫВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Поскольку аэродинамические силы и моменты определяют траекторию движения снаряда (модели), баллистический метод может быть использован для определения не только коэффициента лобового сопротивления c_x, но и других основных аэродинамических характеристик. Так, например, изменение поперечных координат центра масс модели при движении по трассе дает возможность найти коэффициент нормальной силы. Изменение углового положения модели в функции времени позволяет судить об устойчивости модели и вычислить коэффициент опрокидывающего момента.

Таким образом, регистрируя положение модели в пространстве через какие-то промежутки времени и определяя траекторию полета модели, получают исходную информацию для расчета аэродинамических характеристик. Для этого разработаны специальные методы математической обработки результатов экспериментов.

В общем случае отыскивается решение системы из шести дифференциальных уравнений, описывающих движение в пространстве центра масс снаряда и движение последнего относительно центра масс. Найденное решение связывает исходные данные траекторных измерений, полученных из баллистического эксперимента, с исходными аэродинамическими характеристиками. Наиболее просто аэродинамические коэффициенты определяются при использовании приближенных и частных решений. В этом случае эксперименты проводят при условиях, когда можно применять упрощающие задачу допущения о линейности аэродинамических характеристик (малые углы нутации), об отсутствии демпфирования, о возможности усреднения скорости движения на измеряемом участке траектории.

В экспериментальной баллистике для определения параметров траектории движения снаряда применяют метод фотографирования в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и метод стрельб по картонам.

В первом методе используются баллистические трассы, оборудованные специальными станциями фотографирования, расположенными равномерно вдоль трассы. Время между экспозициями регистрируется многоканальными измерителями интервалов времени. Работа серии станций обеспечивается различными системами синхронизации.

Дискретные положения тела в пространстве находятся путем измерений по фотографиям координат характерных точек тела и углов, составляемых образующими модели с осями реперной системы, привязанной к лабораторной системе координат. Измерения фотографий, полученных для одного момента времени, но в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, позволяют определить составляющие угла нутации (углы атаки и скольжения). Кроме того, фотографирование с использованием оптических систем визуализации дает одновременно информацию об обтекании тел потоком. Точность расчета аэродинамических характеристик тем выше, чем меньше погрешности измерения времени между экспозициями, чем меньше ошибки измерения линейных и угловых координат положения модели в каждом сечении и чем больше станций расположено на трассе.

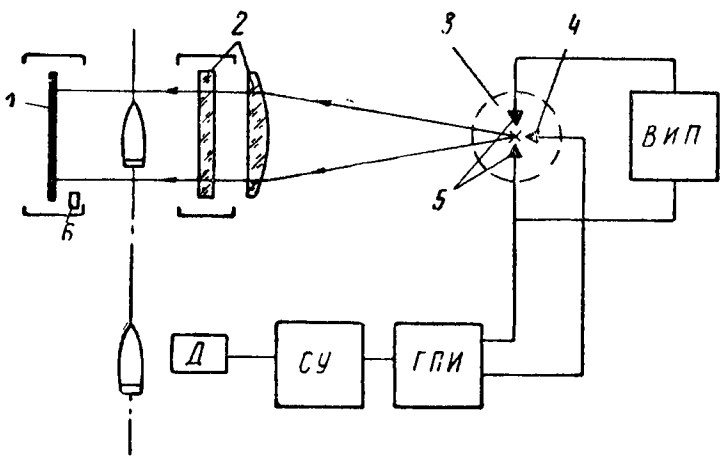


Рис. 42. Схема теневого фотографирования модели с применением искрового генератора: *1* — кассета; *2* — объектив; *3* — искровой разрядник; *4* — поджигающий электрод; *5* — рабочие электроды; *6* — шкала; ВИП — высоковольтный источник питания; ГПИ — генератор поджигающего импульса; СУ — синхронизирующее устройство; Д — датчик регистрации момента пролета

Высокое качество экспериментального фотоматериала может быть получено только при малой длительности экспозиции. Так, при $v = 1000$ м/с размытие не превышает 0,1 мм, если обеспечена длительность экспозиции 0,1 мкс. Наибольшее распространение на баллистических трассах получило фотографирование с малой длительностью экспозиции с помощью импульсных источников света. В качестве таких источников используются газоразрядные лампы и искровые генераторы, сконструированные по одному принципу. Все они содержат конденсатор, заряжаемый от источника высокого напряжения и разряжающийся в нужный момент через искровой промежуток. Инициирование в таких источниках света производится посредством разряда между добавочным третьим электродом и одним из основных (рабочих) электродов. Искровые генераторы с успехом применяются в теневом методе визуализации течений. Для синхронизации моментов срабатывания искрового разрядника 3 (рис. 42) и появления модели в поле наблюдения в схему вводится синхронизирующее устройство *СУ*, получающее сигнал от датчика регистрации момента пролета *Д*.

Относительно недавно в качестве источников света для высокоскоростного фотографирования стали применять оптические квантовые генераторы (ОКГ). С их помощью удалось достичь длительности экспозиции 0,01 мкс, что особенно важно при фотографировании тел, летящих со скоростью 3000—5000 м/с. Высокая точность синхронизации и малая длительность экспозиции также обеспечиваются при использовании электрических быстродействующих затворов (например, ячейки Керра).

При втором методе траекторных измерений координаты центра масс и угловое положение снаряда определяются обмером пробоин в специально обработанном картоне или в прокаленных листах бумаги. Эти листы укрепляются на рамках, устанавливаемых равномерно вдоль трассы перпендикулярно к линии выстрела. При совпадении продольной оси снаряда (пули) с вектором скорости пробоина имеет форму окружности, при наличии угла нутации δ — овальную форму (рис. 43). Угол между наибольшей осью овала и вертикальной осью координат — угол прецессии ν. Угол нутации определяют по тарировочному графику, индивидуальному для каждого вида снаряда. Входным параметром графика является отношение размеров большой оси к малой.

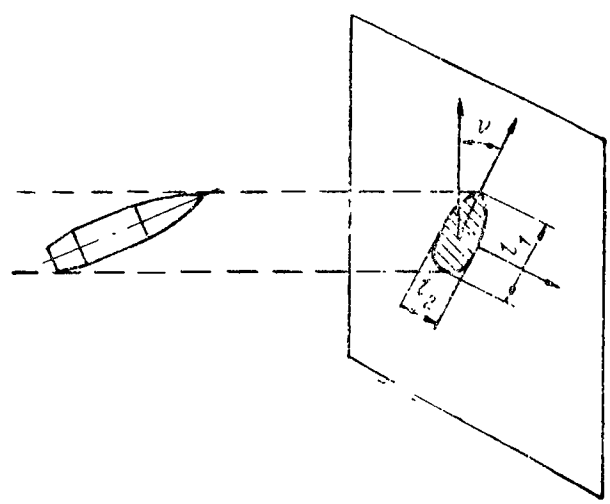


Рис. 43. Вид пробоины в картонной мишени

При достаточном количестве сечений регистрации углов δ и ν на одном периоде нутационных колебаний можно построить экспериментальную кривую $\delta = f(\nu)$. Установка на трассе датчиков момента пролета позволяет получить зависимости $\delta = f_1(t)$, $\nu = f_2(t)$, используемые для расчета коэффициента опрокидывающего момента, определения характеристик динамической устойчивости тела и коэффициента демпфирующего момента.

Регистрация пространственного движения центра масс (например, при определении коэффициента нормальной силы) при данном методе осуществляется путем нанесения на каждую рамку системы прямоугольных координат. Причем все центры координат как бы нанизаны на продолжение оси канала ствола. В практике баллистических стрельб для нанесения системы координат обычно

используется нивелир, устанавливаемый в конце директрисы так, чтобы его оптическая ось являлась продолжением оси канала ствола. При этом вертикальная и горизонтальная линии перекрестия нивелира будут являться осями Y и Z пространственной системы координат $OXYZ$. Положение центра координат на мишенях отмечается (начиная с последней рамки) наколом отверстий иглой. Нанести систему координат можно также с помощью лазера, луч которого пропускается через две втулки, устанавливаемые в канале ствола.

Таким образом, из двух рассмотренных основных методов построения пространственно-временных зависимостей движения тела первый метод требует довольно сложного технического оборудования, но более точен в определении аэродинамических характеристик тел. Второй метод применяется достаточно широко вследствие своей простоты и надежности. Точность определения линейных и угловых координат при этом методе ниже, чем при первом. К тому же в этом случае оказывают влияние удары по листам пробиваемого картона (бумаги). Учет этого влияния обычно производится путем определения параметров движения тел при нормальном и удвоенном количестве листов картона и сравнения полученных в обоих случаях результатов.

Изложим типичную методику определения аэродинамического коэффициента опрокидывающего момента.

Для случая движения гироскопически стабилизированного снаряда на начальном участке траектории с малыми углами нутации (до 10—15°) уравнение нутационных колебаний имеет вид:

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{\sigma}} \sin \alpha \sqrt{\sigma}\, t, \qquad (7.3.1)$$

где α — угловая скорость прецессии — постоянная величина,

$$\alpha = \frac{C\dot{\varphi}_0}{2A}.$$

Коэффициент гироскопической устойчивости для данного участка траектории взят средним значением ($\sigma = \sigma_{ср}$).

Из уравнения (7.3.1) определим полупериод нутационных колебаний

$$\frac{T_\delta}{2} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{\sigma}},$$

откуда найдем

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{\alpha^2 T_\delta{}^2}.$$

Учитывая, что $m_1=\alpha^2(1-\sigma)$, получим

$$m_1 = \alpha^2\left(1-\frac{4\pi^2}{\alpha^2 T_\delta^2}\right).$$

Раскрыв значения α и m_1 можно записать

$$\frac{d^3h}{gA}\ 10^3\,\Delta(y)\,v_{ср}^2\,\widetilde{K}_м\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{C^2\pi^2v_0^2}{A^2\eta^2d^2}-\frac{4\pi^2}{T_\delta^2}.$$

В лабораторных условиях принимают $\Delta(y)=1$. Тогда на участке регистрации при условии, что $v=v_{ср}$, найдем среднее значение

$$\widetilde{K}_м\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{\pi^2 g}{d^2 h v_{ср}^2\,10^3}\left(\frac{C^2v_0^2}{A\eta^2d^2}-\frac{4A}{T_\delta^2}\right). \qquad (7.3.2)$$

Величину T_δ, входящую в расчетную формулу, снимают с экспериментального графика $\delta=f(t)$, вид которого для 7,62-мм винтовочной пули при $\eta=31{,}5$ приведен на рис. 44.

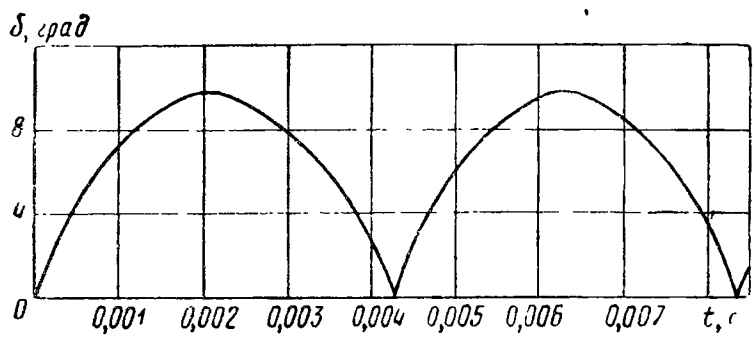


Рис. 44. Экспериментальная зависимость $\delta=f(t)$ для винтовочной пули

Для усиления нутационных колебаний (с целью повышения точности эксперимента) применяют различные дульные насадки механического или газодинамического действия. Последние имеют ассиметричную форму, способствующую созданию дополнительного начального импульса нутации.

Величина h, входящая в выражение (7.3.2), считается постоянной и вычисляется по эмпирическим формулам (1.8.4).

Результаты баллистического эксперимента позволяют также определить аэродинамический коэффициент нормальной силы. Решить эту задачу можно двумя способами. Первый способ основан на использовании соотношения между силами R_T, R_N (рис. 45) и опрокидывающим моментом

$$M = R_T z\sin\delta + R_N z\cos\delta, \qquad (7.3.3)$$

где z — расстояние между центром масс и центром давления.

Полагая угол δ малым ($\sin\delta=\delta$ и $\cos\delta=1$), имеем

$$M = R_{\text{т}} z\delta + R_N z.$$

Заменяя M, $R_{\text{Т}}$ и R_N их значениями (1.8.3), (1.8.1) и (1.8.2), получим

$$dhK_{\text{м}} = dzK_{\text{т}} + lzK_N, \tag{7.3.4}$$

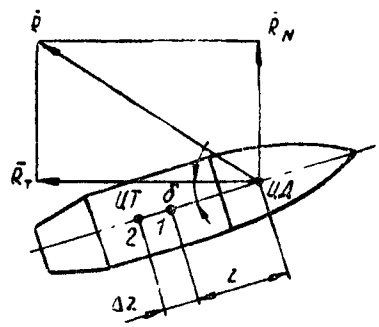


Рис. 45. К определению аэродинамического коэффициента K_N

Зная величины $K_{\text{М}}$ и $K_{\text{Т}}$ для данного снаряда, можем использовать это выражение для подсчета аэродинамического коэффициента K_N. Однако еще неизвестна величина z. Поэтому для определения коэффициента K_N стрельбы производят дважды, смещая во втором случае центр тяжести снаряда (пули) по продольной оси на заданную величину, не изменяя геометрической формы снаряда. При этом считается, что аэродинамический коэффициент $K_{\text{М}}$ изменится, а коэффициенты K_N и $K_{\text{Т}}$ останутся постоянными. Для второго случая имеем

$$d(h+\Delta z)K_{\text{м2}} = d(z+\Delta z)K_{\text{т}} + l(z+\Delta z)K_N. \tag{7.3.5}$$

Исключая из уравнений (7.3.4), (7.3.5) неизвестное расстояние z, получим

$$d(h+\Delta z)K_{\text{м2}} - dhK_{\text{м1}} = d\Delta zK_{\text{т}} + l\Delta zK_N,$$

откуда найдем

$$K_N = \frac{d}{l\Delta z}[(h+\Delta z)K_{\text{м2}} - hK_{\text{м1}} - \Delta zK_{\text{т}}].$$

Точность вычисления K_N таким способом невелика, поскольку разность функций $K_{\text{М1}}$ и $K_{\text{М2}}$, весьма близких по значению, определится с большой относительной ошибкой. Кроме того, смещение центра тяжести может повлиять на характер прецессионно-нутационного движения, а следовательно, изменить положение центра давления. Это значит, что величина Δz в правой и левой частях формулы (7.3.5) разная. Наконец, равенство (7.3.3) не учитывает влияния угла нутации на величину $K_{\text{Т}}$, что также является причиной дополнительной погрешности. Достоинством этого способа является простота постановки эксперимента.

Второй способ определения коэффициента нормальной силы предполагает построение неподвижной системы координат с целью регистрации пространственного движения центра масс исследуемого тела.

Движение центра масс снаряда (пули) под действием нормальной силы описывается уравнениями (6.2.7). Эти уравнения показывают, что центр масс совершает сложное движение, состоящее из непериодического, определяемого членом, содержащим t, и двух круговых периодических с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Амплитуда периодического движения с угловой скоростью ω_1 весьма мала по сравнению с амплитудой кругового движения с угловой скоростью ω_2 и практически не влияет на движение центра масс.

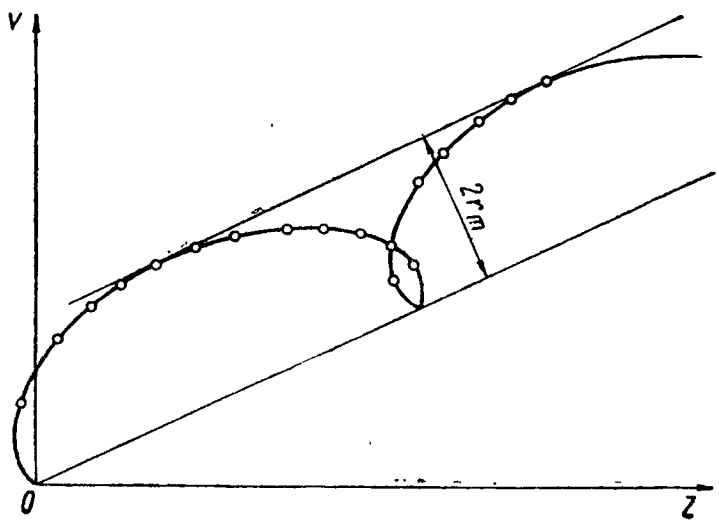


Рис. 46. Экспериментальная запись движения центра масс винтовочной пули в плоскости, перпендикулярной к вектору скорости

Регистрируя экспериментальным путем движение центра масс в плоскости YOZ (рис. 46), можно выделить периодическую составляющую $2r_m$, содержащую аэродинамический коэффициент K_N. Поскольку

$$2r_m = \frac{m_N \delta_{max}}{m_1} \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

можем записать

$$K_N = \frac{2qr_m (1 - \sqrt{\sigma})^2 \alpha^2}{dl\, 10^3 v^2 \delta_{max}}. \qquad (7.3.6)$$

Точность расчета коэффициента K_N по этой формуле в основном определяется ошибками измерения параметров r_m и δ_{max}.

При использовании метода стрельб по картонам абсолютная точность замера пробоин не выше 0,5 мм. Следовательно, если величина r_m при стрельбе не превышает 5 мм, погрешность в ее определении будет составлять 10% и более. Учитывая, что при стрельбе по картонам точность регистрации δ_{max} составляет 5—10%, получим ориентировочную погрешность в определении K_N, равную 15—20%. Для повышения точности подсчета K_N следует применять метод фотографирования тела в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Кроме того, при стрельбах желательно стремиться к увеличению амплитуды нутационных колебаний (увеличению r_m). Однако углы нутации δ не должны превышать 15°, так как при бóльших углах не оправдывается допущение о линейной зависимости величин R_N и M от угла нутации, положенное в основу при выводе выражений (7.3.6) и (7.3.2).

В настоящее время для отыскания аэродинамических характеристик тел широко используются специальные методы обработки результатов эксперимента, не предполагающие линейной зависимости сил и моментов от угла нутации. Аэродинамические характеристики, входящие в систему уравнений, описывающих пространственное движение тела в воздухе, представляются в виде аппроксимирующих выражений с произвольными коэффициентами. Задача математической обработки состоит в том, чтобы найти такие значения этих коэффициентов, при которых решение системы уравнений с определенной точностью совпадает с экспериментальными данными регистрации параметров движения.

7.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СНАРЯДОВ В АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Наряду с развитием аэробаллистического метода, классическим инструментом экспериментальной аэродинамики остаются аэродинамические трубы. С их помощью исследуются всевозможные аэродинамические характеристики снарядов и других летательных аппаратов. По сравнению с баллистическим методом, продувки в аэродинамических трубах не требуют большого количества моделей, значительно проще задается угловое положение последних, силы и моменты, действующие на модель, определяются непосредственным измерением с помощью аэродинамических весов.

К основным недостаткам применения метода продувок моделей в аэродинамических трубах относятся искажение державкой процесса течения потока и трудность изучения аэродинамических сил и моментов, связанных с вращательным движением снаряда.

В настоящее время при изучении движения моделей в гиперзвуковом потоке применяют аэробаллистические трубы, в которых снаряд (модель) выстреливается навстречу сверхзвуковому потоку.

Исследование силового воздействия потока на модель в аэродинамических трубах основывается на принципе замены прямого

движения (полет тела в неподвижной среде) движением среды относительно неподвижно установленного тела.

Аэродинамическая труба состоит из форкамеры, сопла, рабочей части, диффузора и привода (источник энергии). Все эти элементы присущи как дозвуковым, так и сверхзвуковым трубам, однако величина создаваемых скоростей потока накладывает определенный отпечаток на их конфигурацию и взаимное расположение элементов.

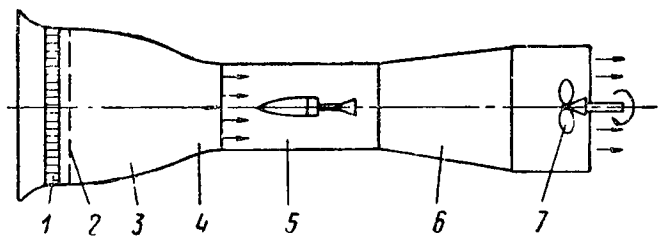


Рис. 47. Основные элементы аэродинамической трубы: *1* — хонейкомб; *2* — сетка; *3* — форкамера; *4* — сопло; *5* — рабочая часть; *6* — диффузор; *7* — привод

В дозвуковую незамкнутую аэродинамическую трубу воздух попадает через форкамеру *3* (рис. 47), выполненную в виде некоторого объема, ограниченного жесткими стенками, с открытой входной частью. Отсюда газ, находящийся под давлением, истекает через сопло *4* в рабочую часть трубы *5*. Запас газа в форкамере, необходимый для непрерывной работы трубы, пополняется с помощью вентиляторного привода *7*. В форкамере размещаются приемник полного давления, приборы для измерения температур и ряд вспомогательных устройств, к числу которых относятся хонейкомб *1* — сотообразная решетка и детурбулизирующая сетка *2*. Хонейкомб разрушает крупные вихри и выравнивает скосы, а сетка способствует созданию равномерного поля скоростей по поперечному сечению форкамеры и уменьшению начальной скорости турбулентности потока.

Сопло трубы *4* — канал определенной конфигурации — обеспечивает получение заданной скорости однородного потока. Сопла делят на до- и сверхзвуковые. Первые имеют вид сужающегося канала, в котором скорость потока регулируется изменением перепада давления между форкамерой и выходным сечением сопла. Сверхзвуковое сопло имеет дозвуковой участок, в котором воздух, поступающий из форкамеры, разгоняется до звуковой скорости, и сверхзвуковой участок, на котором происходит дальнейший разгон и окончательное формирование равномерного сверхзвукового потока. Каждое сопло обеспечивает получение лишь определенного значения числа Маха на выходе. Поэтому сверхзвуковые аэродинамические трубы комплектуются набором сменных сопл. Сверхзвуковые сопла прямоугольного сечения могут выполняться регулируемыми, что способствует удобству их эксплуатации вследствие возможности плавно изменять число M на выходе.

В рабочей части трубы *5* устанавливают испытываемые модели. Газовый поток здесь должен иметь равномерное поле скоростей, температур и давлений. Рабочие части могут быть открытыми, закрытыми и в виде герметической камеры.

Открытая рабочая часть удобнее в эксплуатации, она позволяет устанавливать модели большего размера, чем в случае применения рабочей части, ограниченной стенками. Однако взаимодействие струи с окружающим воздухом вызывает большие потери кинетической энергии потока, что приводит к необходимости увеличения мощности привода. При закрытой рабочей части можно менять давление около модели в широких пределах и за счет создания разрежения в рабочей части уменьшить давление в форкамере, т. е. экономно расходовать энергию, необходимую для работы трубы. Аэродинамические качества потока в закрытой рабочей части выше, чем в открытой. Недостатки этого типа рабочей части: относительная сложность конструкции, затрудненное обслуживание модели в закрытом пространстве, необходимость тщательной герметизации. Рабочая часть в виде герметической камеры также позволяет изменять давление в потоке и тем самым моделировать полет снаряда на различных высотах. Увеличенные, по сравнению с закрытой рабочей частью, размеры камеры упрощают установку и обслуживание модели.

Диффузор *6* — специально спрофилированный канал — располагается сразу за рабочей частью. Он уменьшает скорость потока газа с целью наиболее эффективного превращения его кинетической энергии в энергию давления. Различают до- и сверхзвуковой диффузоры. Первый представляет собой расширяющийся канал, второй состоит из двух участков трубы: начального сужающегося и расширяющегося.

Привод аэродинамической трубы — устройство для сообщения потоку газа необходимой энергии, при которой его скорость в рабочей части достигает заданного значения. В качестве привода в дозвуковых трубах часто применяют низконапорные осевые вентиляторы, в сверхзвуковых трубах — многоступенчатые компрессоры.

Кроме того, в конструкцию трубы могут включаться осушители воздуха, подогреватели, теплообменники.

По конструктивным признакам аэродинамические трубы могут быть замкнутыми и незамкнутыми. В трубах первого типа непрерывно циркулирует одна и та же масса газа. Они функционируют при различных давлениях в рабочей части, обеспечивая возможность исследования моделей при различных числах Рейнольдса. В незамкнутых трубах происходит непрерывная смена потока газа, который каждый раз должен разгоняться до расчетной скорости. Очевидно, что расход энергии в такой трубе выше, чем в замкнутой установке, где необходимо лишь поддерживать движение циркулирующего газа.

В зависимости от скорости потока в рабочей части аэродинамические трубы подразделяют на дозвуковые ($0<M\leqslant 0{,}8$), околозвуковые ($0{,}8<M\leqslant 1{,}2$), сверхзвуковые ($1{,}2<M\leqslant 5$) и гиперзвуковые ($M>5$).

В зависимости от длительности работы трубы бывают кратковременного и постоянного действия. Труба кратковременного действия позволяет исследовать аэродинамику моделей в течение малого промежутка времени (от нескольких секунд до нескольких минут). Питание такой трубы осуществляется от батареи баллонов высокого давления, куда воздух предварительно накачивается компрессорами. К трубам кратковременного действия относятся также вакуумные трубы, в которых необходимый для достижения заданного числа M перепад давления создается за счет разрежения на выходе из диффузора.

В трубах постоянного действия поток газа создается с помощью осевого компрессора, обеспечивающего необходимую степень сжатия газа для достижения заданного числа M. Время действия такой трубы практически не ограничено и определяется условиями эксперимента.

Величины аэродинамических коэффициентов, полученных путем продувок, зависят от условий эксперимента в трубах. Для получения достоверных экспериментальных данных обязательно геометрическое подобие модели и натурного образца, а также обеспечение аэродинамического подобия. В частности, целесообразным считается обеспечение одновременного подобия по числам Маха M и Рейнольдса Re.

Поскольку условия обтекания модели в рабочей части трубы отличаются от условий в свободном полете, то возникает необходимость введения поправок в полученные результаты исследований. Например, для дозвуковых труб вводится поправка на загромождение потока моделью и спутной струей. Модель, помещенная в равномерный поток, изменяет площадь проходного сечения рабочей части трубы. В результате между моделью и стенками рабочей части устанавливается течение, отличное от течения в свободном полете.

Размеры моделей оказывают влияние на условия работы самой трубы и должны обеспечивать при запуске выход ее на расчетный режим обтекания. Допустимые размеры модели с учетом придания ей углов атаки находятся из условия исключения «запирания» трубы прямым скачком уплотнения, возникающим перед моделью в момент запуска.

Поместив модель в рабочую часть трубы, необходимо исследовать однородность газового потока и определить его скорость и температуру. Для определения скорости чаще всего используют комбинированные насадки, с помощью которых одновременно измеряют статическое $p_{ст}$ и полное $p_{торм}$ (давление торможения) давления потока. По полученным значениям $p_{ст}$ и $p_{торм}$ рассчитывают число Маха M. Непосредственное измерение скорости потока

возможно с помощью термоанемометра, принцип действия и устройство которого основаны на изменении температуры нагретого проводника, помещенного в поток, при изменении скорости его обтекания. Основным элементом термоанемометра является проволочный (или пленочный) датчик. Преимущество термоанемометра перед другими приборами исследования воздушных течений состоит в малых размерах датчика, вносящего небольшие возмущения в поток.

Термоанемометр используют также для измерения турбулентности и определения направления потока. Однородность потока оценивают по результатам замеров скорости в различных точках рабочего пространства трубы.

Современные аэродинамические трубы позволяют осуществлять весовые испытания, дренажные исследования, а также применять в экспериментах визуальные методы.

Весовые испытания предназначены для непосредственных измерений с помощью аэродинамических весов сил и моментов, действующих на снаряд или другой летательный аппарат. При таких измерениях вместо натурного образца обычно используется модель, которая закрепляется на специальных державках, связанных с чувствительными элементами весов, и устанавливается в рабочей части трубы. По числу измеряемых составляющих аэродинамической силы или момента весы подразделяются на однокомпонентные, двухкомпонентные и т. д. Три составляющих главного вектора аэродинамической силы и три составляющих главного момента могут быть измерены одновременно с помощью шестикомпонентных весов. Важнейшее требование предъявляемое к многокомпонентным весам, — независимость измерений по различным каналам, чтобы каждый чувствительный элемент весов измерял только определенную составляющую и не реагировал на другие.

В зависимости от условий эксперимента могут применяться внешние весы с измерительными элементами вне модели и внутренние весы с расположением этих элементов внутри модели или внутри устройства, на котором она закреплена.

Упругий элемент *2* (рис. 48) наиболее распространенных двухкомпонентных внутренних аэродинамических весов для измерения нормальной силы R_N и момента M представляет собой стержень, соединенный одним концом с моделью *1*, а другим с державкой *3*. Средний элемент стержня (центральный стержень *6*) с наклеенными датчиками *7* и *9* выполнен утолщенным и воспринимает основную часть нормальной силы. Наружные элементы (стержни) *5* с датчиками *8* и *10* посредине изготовляются более тонкими и деформируются под действием силы R_N и момента M. Причем эти элементы, претерпевая растяжение (сжатие), воспринимают небольшую часть силы R_N, а изгибаясь, — почти целиком момент M. Центральный стержень *6* при нагружении моментом M играет роль упругого шарнира, вокруг которого поворачиваются толстые соединительные звенья *4*.

Тензодатчики соединены в мосты так, чтобы обеспечить на выходе сигналы, пропорциональные только одной составляющей. При измерении нормальной силы датчики *9* включены в разные плечи моста. Если на упругий элемент действует сила R_N,то эти датчики регистрируют деформации разных знаков и на выходе появляется сигнал $\Delta u_N = k_1 R_N$. Поскольку при действии момента M центральный стержень *6* играет роль упругого шарнира, датчики *9* регистрируют деформации одного знака (это относится и к датчикам *7*) и начальная балансировка моста не нарушается.

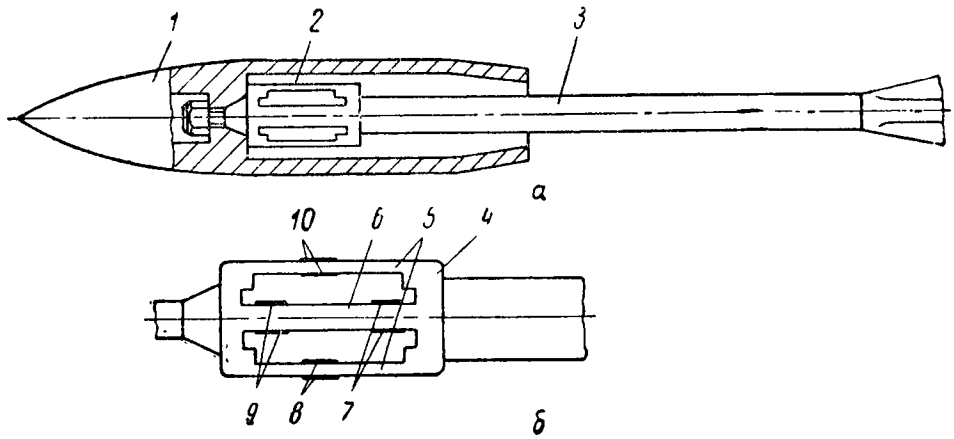


Рис. 48. Схема установки модели на двухкомпонентных внутренних аэродинамических весах (а) и устройство весового элемента (б):
1 — модель; *2* — весовой элемент; *3* — державка; *4* — соединительное звено; *5* — наружные стержни; *6* — центральный стержень; *7—10* — тензодатчики

При измерении момента M датчики *8* (а также датчики *10*), наклеенные на элементы 5, включены в разные плечи моста. Если на упругий элемент действует только нормальная сила, то эти датчики регистрируют деформацию одного знака, так как наружные элементы 5 подвергаются только растяжению (сжатию). Поэтому сопротивления в разных плечах моста изменяются на одинаковую величину и балансировка моста не нарушается. Воздействие момента M на элементы *5* вызывает их изгиб, и датчики *8* (*10*) регистрируют деформации разных знаков. В этом случае на выходе появляется сигнал, пропорциональный моменту $\Delta u_M = k_2 M$. Этот момент определяется относительно электрической оси весов.

Каждый мост подключается к отдельному каналу тензостанции, выход которого связан со шлейфным осциллографом.

Внутримодельные весы позволяют измерять аэродинамические силы и моменты с точностью до 1%. Они точнее внешних весов, поскольку при их использовании влияние державок на обтекание модели значительно уменьшено.

Перед началом измерений производят тарировку тензометрических весов, т. е. определяют зависимость выходного сигнала Δu от величины приложенной силы или момента. Для тарировки используется специальное устройство, позволяющее проводить раздельную нагрузку весовых элементов. Так, если тарируется канал, измеряющий силу осевого сопротивления R_T, то известная по величине нагрузка прикладывается вдоль продольной оси модели, внутри которой расположены весы. При тарировке каналов нормальной силы и момента внутримодельные весы размещаются в специальном цилиндре с шипами на внешней поверхности. Средний ряд шипов расположен в поперечной плоскости, совпадающей с электрической осью аэродинамических весов. При подвешивании груза на такие шипы выходной сигнал будет возникать только в канале для измерения силы R_N. Если грузы подвешиваются на шипы в других рядах, то сигнал появляется одновременно в двух каналах — для измерения силы R_N и момента M. Поскольку кроме приложенной внешней нагрузки на аэродинамические весы действует составляющая веса модели, ее необходимо компенсировать. С этой целью аэродинамические весы закрепляют в дозаторе углов атаки и, придавая модели экспериментальные углы атаки, снимают показания всех каналов. Эти показания учитываются затем при продувках как поправки на вес.

При использовании внутренних аэродинамических весов с донной державкой необходимо учитывать влияние поперечных размеров державки на правильность определения коэффициента лобового сопротивления. Для этого проводят серию методических продувок одной и той же модели с донными державками различных диаметров. Далее путем экстраполяции опытной кривой $c_x = f(\bar{d}_{\text{дер}})$, где $\bar{d}_{\text{дер}} = d_{\text{дер}}/d_{\text{мид}}$ — относительный диаметр державки, находят значение, соответствующее величине $\bar{d}_{\text{дер}} = 0$, которое принимается за истинный коэффициент силы сопротивления для заданной формы модели тела вращения.

По измеренным силам и моментам рассчитываются соответствующие аэродинамические коэффициенты. Определение параметров потока, входящих в расчетные формулы, производится, как правило, одновременно с весовыми измерениями. Важным преимуществом весовых испытаний является нахождение суммарных аэродинамических характеристик исследуемой модели, учитывающих одновременное воздействие сил трения и давления.

Для проведения *дренажных исследований* в стенке модели по нормали к ее поверхности просверливаются отверстия малого диаметра, каждое из которых соединяется с манометром. При продувках модели в аэродинамической трубе фиксируются показания этих манометров, по которым определяются соответствующие давления. В результате строится график распределения давлений по поверхности модели. Анализируя такое распределение давлений, можно сделать выводы о характере обтекания поверхности, нали-

чии скачков уплотнения, структуре пограничного слоя и т. д. По найденному распределению давлений можно вычислить суммарные аэродинамические силы и моменты, обусловленные этим распределением.

Особенность дренажных исследований состоит в том, что по их результатам определяется только составляющая аэродинамической силы от давления. Силы трения в этом случае не могут быть измерены.

При проведении аэродинамических исследований применяются также *визуальные методы*, основанные на различных оптических эффектах, позволяющих наблюдать процесс потока около обтекаемого тела или, как говорят, обеспечивающих визуализацию потока. Оптические методы визуализации позволяют проводить исследования течения, не вызывая в них возмущений, и получать информацию по всей регистрируемой области одновременно. Визуальная картина обтекания используется совместно с численными результатами расчета действующих сил и моментов для усовершенствования аэродинамической формы проектируемого снаряда.

Существуют несколько методов визуального исследования газовых потоков. Наиболее распространенными из них являются оптические методы, основанные на свойстве воздуха (или вообще газа) изменять коэффициент преломления в зависимости от плотности.

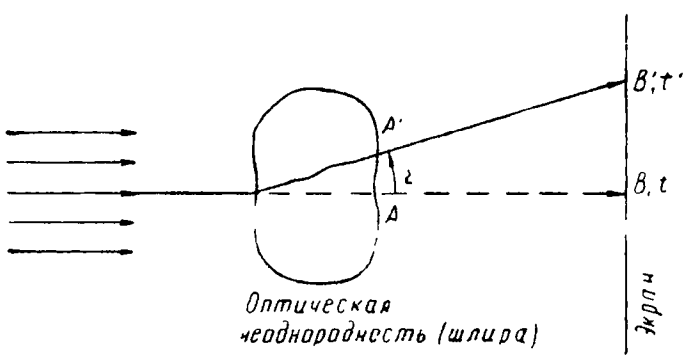


Рис. 49. Ход лучей при встрече с оптической неоднородностью

Если на пути светового луча встречается оптическая неоднородность — «шлира», то возмущенный луч A' (рис. 49) попадает на экран в точку B' в момент времени t'. Невозмущенный луч A пришел бы в точку B экрана в момент t. С помощью специальной оптической аппаратуры на экране фиксируется либо линейное смещение луча $B'—B$ (теневой метод), либо угловое отклонение ε (шлирен-метод), либо запаздывание по фазе $t'—t$ (интерференционный метод). Возможны и различные модификации этих методов.

Теневой метод визуализации (метод светящейся точки) отличается предельной простотой и, в частности, при фотографировании в расходящихся лучах не требует оптического оборудования. Но при таком фотографировании искажается изображение процесса, поэтому предпочтение чаще отдается фотографированию в параллельных лучах. Основные недостатки метода: сравнительно невысокая чувствительность, трудности анализа результатов и ограничения в получении количественноой информации о распределении плотностей. Теневой метод с диафрагмированием пучка в приемной части оптической системы, получивший название шлирен-метода, позволяет обнаружить градиенты показателя преломления и допускает количественное определение величины первой производной плотности. Наибольшими потенциальными возможностями в отношении получения количественных данных располагает интерференционный метод, с помощью которого можно регистрировать изменение показателя преломления, а следовательно, определять соответствующее распределение плотности среды. Наиболее часто в аэродинамических исследованиях используют интерферометр Маха—Цендера.

В данной главе изложены только понятия об экспериментальных методах, применяемых при решении задач внешней баллистики, без подробного рассмотрения существующих методик исследования и их технических реализаций. Более полно эти вопросы освещены в соответствующих учебниках и монографиях.

ПАРАМЕТРЫ СТАНДАРТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Геометрическая высота h, м	Температура T, °К	$\frac{\rho}{\rho_c}$	Скорость звука a, м/с
0	288,150	1,00000	340,294
500	284,900	$9{,}52876 \cdot 10^{-1}$	339,370
1000	281,651	9,07477	336,435
1500	278,402	8,63759	334,489
2000	275,154	8,21676	332,532
2500	271,906	7,81187	330,563
3000	268,659	7,42248	328,584
3500	265,413	7,04818	326,592
4000	262,166	6,68854	324,589
4500	258,921	6,34317	322,573
5000	255,676	6,01166	320,545
5500	252,431	5,69362	318,505
6000	249,187	5,38866	316,452
6500	245,943	5,09641	314,385
7000	242,700	4,81648	312,306
7500	239,457	4,54850	310,212
8000	236,215	4,29213	308,105
8500	232,974	4,04700	305,984
9000	229,733	3,81276	303,848
9500	226,492	3,58907	301,697
10000	223,252	3,37559	301,532
10500	220,013	3,17200	297,351
11000	216,774	2,97797	295,154
11500	216,650	2,75453	295,069
12000	216,650	2,54643	295,069

Геометрическая высота h, м	Температура T, °К	$\frac{\rho}{\rho_c}$	Скорость звука a, м/с
12500	216,650	2,35408	295,069
13000	216,650	2,17629	295,069
13500	216,650	2,01195	295,069
14000	216,650	1,86004	295,069
14500	216,650	1,71963	295,069
15000	216,650	1,58983	295,069
15500	216,650	1,46985	295,069
16000	216,650	1,35894	295,069
16500	216,650	1,25642	295,069
17000	216,650	1,16164	295,069
17500	216,650	1,07403	295,069
18000	216,650	$9{,}93034 \cdot 10^{-2}$	295,069
18500	216,650	9,18160	295,069
19000	216,650	8,48942	225,069
19500	216,650	7,84951	295,069
20000	216,650	7,25793	295,069

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ C_x (M)

M	К закону Сиаччи	К закону 1943 г.	M	К закону Сиаччи	К закону 1943 г.
0,1	0,252	0,157	2,1	0,671	0,309
0,2	0,252	0,157	2,2	0,657	0,303
0,3	0,252	0,157	2,3	0,644	0,297
0,4	0,252	0,157	2,4	0,630	0,292
0,5	0,253	0,157	2,5	0,616	0,287
0,6	0,256	0,158	2,6	0,603	0,283
0,7	0,261	0,158	2,7	0,590	0,279
0,8	0,279	0,160	2,8	0,577	0,277
0,9	0,386	0,190	2,9	0,564	0,273
1,0	0,536	0,325	3,0	0,552	0,270
1,1	0,629	0,378	3,1	0,541	0,267
1,2	0,680	0,385	3,2	0,528	0,265
1,3	0,707	0,381	3,3	0,517	0,263
1,4	0,720	0,371	3,4	0,506	0,263
1,5	0,725	0,361	3,5	0,496	0,261
1,6	0,723	0,351	3,6	0,486	0,260
1,7	0,716	0,342	3,7	0,476	0,260
1,8	0,708	0,332	3,8	0,467	0,260
1,9	0,697	0,324	3,9	0,458	0,260
2,0	0,684	0,316	4,0	0,449	0,260

ЗНАЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СИАЧЧИ

Таблица 1

Значения основных функций Сиаччи применительно к закону сопротивления 1943 г.

$D(\overline{u})$	$J(\overline{u})$	$A(\overline{u})$	$T(\overline{u})$	$\overline{u}$
0	0	0	0	2000,0
500	0,002610	0,6391	0,2579	1880,6
1000	0,005562	2,6669	0,5321	1768,3
1500	0,008901	6,2654	0,8237	1662,7
2000	0,012677	11,6399	1,1338	1563,4
2500	0,016948	19,024	1,4637	1470,0
3000	0,021778	28,681	1,8145	1382,3
3500	0,027242	40,908	2,1876	1299,7
4000	0,033424	56,043	2,5844	1221,8
4500	0,04042	74,47	3,007	1148,2
5000	0,04835	96,62	3,456	1078,4
5500	0,05734	122,99	3,935	1011,9
6000	0,06757	154,16	4,445	948,4
6500	0,07923	190,80	4,990	887,6
7000	0,09256	233,67	5,573	829,2

$D(\overline{u})$	$J(\overline{u})$	$A(\overline{u})$	$T(\overline{u})$	$\overline{u}$
7500	0,10787	283,69	6,197	773,3
8000	0,12550	341,9	6,868	719,6
8500	0,14592	409,6	7,589	668,0
9000	0,16968	488,4	8,367	618,4
9500	0,19748	580,0	9,208	570,9
10000	0,23020	686,7	10,121	525,4
10500	0,2690	811,2	11,115	482,1
11000	0,3151	956,9	12,199	441,1
11500	0,3704	1127,8	13,386	402,8
12000	0,4367	1329,1	14,685	368,1
12500	0,5157	1556,7	16,103	338,7
13000	0,6073	1846,9	17,631	317,6
13500	0,7092	2175,6	19,242	303,5
14000	0,8202	2557,6	20,924	291,4
14500	0,9404	2997	22,67	280,3
15000	1,0701	3500	24,49	269,9
15500	1,2100	4069	26,38	260,0
16000	1,3607	4711	28,34	250,4
16500	1,5231	5432	30,37	241,3
17000	1,6981	6237	32,48	232,4
17500	1,8865	7132	34,68	224,0
18000	2,0896	8126	36,95	215,8
18500	2,308	9224	39,31	207,9
19000	2,544	10437	41,76	200,3
19500	2,798	11771	44,31	192,9
20000	3,072	13238	46,95	185,9
20500	3,366	14847	49,69	179,08
21000	3,684	16608	52,53	172,52
21500	4,026	18535	55,49	166,21
22000	4,395	20639	58,55	160,14

$D(\overline{u})$	$J(\overline{u})$	$A(\overline{u})$	$T(\overline{u})$	$\overline{u}$
22500	4,792	22930	61,73	154,28
23000	5,220	25440	65,04	148,63
23500	5,681	28160	68,46	143,19
24000	6,178	31120	72,02	137,96
24500	6,713	34340	75,71	132,91
25000	7,289	37840	79,55	128,05
25500	7,910	41640	83,53	123,36
26000	8,580	45760	87,66	118,85
26500	9,301	50230	91,94	114,50
27000	10,078	55070	96,39	110,31
27500	10,915	60320	101,01	106,28
28000	11,816	66000	105,80	102,39
28500	12,788	72140	110,78	98,64
29000	13,835	78800	115,94	95,03
29500	14,963	85990	121,30	91,37
30000	16,178	93780	126,87	88,21
30500	17,487	102190	132,64	84,98
31000	18,900	111280	138,64	81,87
31500	20,416	121100	144,86	78,87
32000	22,054	131710	151,32	75,99
32500	23,82	143180	158,02	73,21
33000	25,72	155560	164,98	70,53
33500	27,76	168920	172,20	67,95
34000	29,97	183350	179,70	65,46
34500	32,35	198920	187,48	63,07
35000	34,91	215700	195,56	60,76
35500	37,67	233800	203,94	58,54
36000	40,64	253400	212,65	56,40
36500	43,84	274500	221,7	54,33
37000	47,29	297300	231,0	52,35
37500	51,01	321900	240,8	50,43

Значения вспомогательной функции Сиаччи $f_0 = c' \sin 2\theta_0$

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с								
	1200	1175	1150	1125	1100	1075	1050	1025	1000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
250	0,00174	00181	00189	00198	00207	00217	00227	00239	00252
500	00355	00370	00386	00404	00423	00443	00461	00488	00513
750	00544	00567	00592	00619	00649	00679	00712	00748	00785
1000	00741	00773	00808	00844	00884	00926	00971	01019	01071
1250	00947	00987	01033	01079	01130	01184	01242	01303	01371
1500	01162	01211	01268	01324	01387	01454	01525	01601	01685
1750	01387	01445	01513	01580	01656	01736	01821	01913	02014
2000	0,01622	01691	01770	01849	01937	02031	02132	02240	02358
2250	01868	01948	02039	02131	02232	02340	02458	02583	02720
2500	02125	02217	02320	02426	02541	02665	02799	02943	03100
2750	02394	02500	02614	02735	02865	03006	03158	03321	03499
3000	02676	02796	02923	03060	03206	03364	03535	03719	03918
3250	02972	03106	03247	03401	03564	03740	03931	04138	04360
3500	03282	03431	03587	03758	03840	04137	04349	04579	04827
3750	03608	03772	03945	04134	04336	04555	04789	05044	05320
4000	0,03951	04131	04322	04530	04753	04995	05254	05535	05840
4250	04312	04509	04719	04948	05193	05459	05745	06054	06390
4500	04691	04907	05138	05388	05658	05950	06264	06604	06973
4750	05091	05327	05580	05883	06149	06469	06823	07186	07591
5000	05514	05771	06047	06345	06668	07017	07394	07803	08247
5250	05961	06240	06541	06866	07218	07599	08011	08458	08944
5500	06432	06737	07064	07418	07801	08217	08667	09156	09687
5750	06931	07263	07618	08004	08421	08874	09366	09901	10480
6000	0,07461	07821	08207	08626	09080	09573	10111	10696	1133
6250	08023	08413	08833	09288	09782	10319	1090	1155	1223
6500	08619	09042	09498	09994	10530	1111	1174	1245	1319
6750	09253	09712	10205	10746	1133	1196	1264	1341	1422
7000	09930	10428	1096	1155	1218	1287	1361	1444	1532
7250	10651	1119	1177	1240	1309	1384	1465	1554	1650
7500	1142	1201	1264	1332	1407	1488	1576	1672	1776
7750	1225	1288	1357	1430	1512	1599	1695	1798	1910
8000	0,1313	1382	1456	1535	1623	1718	1821	1931	2051

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8250	1407	1482	1562	1648	1742	1844	1955	2072	2200
8500	1508	1589	1675	1768	1869	1978	2096	2221	2357
8750	1616	1703	1795	1895	2003	2119	2245	2378	2522
9000	1731	1824	1923	2030	2145	2268	2401	2542	2694
9250	1853	1952	2059	2172	2294	2425	2565	2714	2874
9500	1983	2088	2202	2322	2451	2589	2737	2894	3062
9750	2120	2231	2352	2480	2616	2761	2917	3082	3258
10000	0,2264	2382	2510	2645	2788	2941	3104	3278	4362
10250	2416	2540	2675	2817	2968	3129	3299	3482	3674
10500	2575	2706	2848	2997	3155	3324	3502	3693	3894
10750	2742	2880	3028	3184	3350	3527	3713	3912	4122
11000	2916	3061	3216	3379	3553	3738	3932	4140	4359
11250	3098	3250	3412	3582	3764	3957	4160	4376	4604
11500	3287	3447	3616	3793	3983	4184	4396	4620	4857
11750	3484	3652	3828	4012	4210	4419	4641	4873	5119
12000	0,3689	0,3864	0,4047	0,4240	0,4446	0,4663	0,4894	0,5134	0,5391
12250	0,3902	0,4084	0,4275	0,4476	0,4690	0,4916	0,5156	0,5405	0,5672
12500	0,4123	0,4312	0,4511	0,4720	0,4943	0,5177	0,5426	0,5685	0,5962
12750	0,4352	0,4548	0,4756	0,4973	0,5205	0,5447	0,5705	0,5975	0,6262
13000	0,4590	0,4793	0,5009	0,5235	0,5475	0,5727	0,5994	0,6274	0,6571
13500	0,5091	0,5310	0,5542	0,5786	0,6044	0,6315	0,6601	0,6902	0,7220
14000	0,5627	0,5864	0,6113	0,6376	0,6652	0,6943	0,7249	0,7571	0,7912
14500	0,6201	0,6456	0,6723	0,7005	0,7300	0,7612	0,7940	0,8284	0,8648
15000	0,6814	0,7087	0,7373	0,7675	0,7990	0,8324	0,8675	0,9043	0,9340
15500	0,7468	0,7759	0,8066	0,8388	0,8726	0,9082	0,9457	0,9850	1,0260
16000	0,8166	0,8476	0,8804	0,9148	0,9510	0,9889	1,0288	1,0707	1,115
16500	0,8909	0,9241	0,9590	0,9958	1,0343	1,0748	1,117	1,162	1,209
17000	0,9700	1,0056	1,0429	1,0821	1,123	1,166	1,211	1,259	1,309
17500	1,0541	1,092	1,132	1,173	1,217	1,263	1,311	1,362	1,415
18000	1,143	1,184	1,226	1,270	1,317	1,366	1,417	1,471	1,527
18500	1,239	1,282	1,327	1,374	1,423	1,476	1,530	1,586	1,647
19000	1,341	1,387	1,435	1,485	1,537	1,592	1,649	1,709	1,774
19500	1,449	1,498	1,549	1,602	1,658	1,715	1,776	1,840	1,909
20000	1,563	1,615	1,670	1,726	1,786	1,847	1,912	1,980	2,053
20500	1,685	1,740	1,798	1,858	1,922	1,987	2,057	2,129	2,206

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21000	1,815	1,874	1,935	1,999	2,066	2,136	2,210	2,287	2,368
21500	1,953	2,016	2,080	2,148	2,219	2,294	2,372	2,454	2,541
22000	2,099	2,166	2,234	2,306	2,382	2,461	2,544	2,631	2,724
22500	2,255	2,325	2,398	2,475	2,555	2,639	2,728	2,820	2,918
23000	2,421	2,495	2,537	2,655	2,740	2,829	2,923	3,021	3,124
23500	2,597	2,676	2,759	2,846	2,936	3,031	3,130	3,234	3,343
24000	2,784	2,869	2,956	3,049	3,144	3,245	3,350	3,460	3,576
24500	2,983	3,074	3,166	3,264	3,366	3,472	3,584	3,701	3,824
25000	3,195	3,291	3,389	3,493	3,602	3,714	3,833	3,957	4,088
25500	3,421	3,522	3,627	3,737	3,852	3,972	4,098	4,230	4,369
26000	3,661	3,767	3,879	3,996	4,118	4,246	4,380	4,520	4,667
26500	3,916	4,028	4,147	4,271	4,401	4,537	4,679	4,828	4,984
27000	4,187	4,307	4,433	4,564	4,702	4,847	4,997	5,156	5,321
27500	4,475	4,603	4,737	4,877	5,023	5,176	5,336	5,504	5,680
28000	4,782	4,918	5,060	5,209	5,364	5,526	5,696	5,875	6,061
28500	5,109	5,253	5,404	5,562	5,727	5,899	5,080	6,270	6,467
29000	5,457	5,610	5,770	5,938	6,113	6,296	6,488	6,690	6,899
29500	5,827	5,990	6,160	6,338	6,524	6,719	6,922	7,136	7,358
30000	6,221	6,394	6,574	6,763	6,961	7,169	7,384	7,610	
30500	6,640	6,824	7,015	7,215	7,426	7,647			
31000	7,087	7,282	7,484	7,697					
31500	7,564	7,770							

Продолжение табл. 2

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с								
	1000	975	950	925	900	875	850	825	800
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0,00200	0,00211	0,00222	0,00233	0,00246	0,00260	0,00275	0,00292	0,00312
400	0,00407	0,00429	0,00451	0,00475	0,00502	0,00531	0,00562	0,00597	0,00636
600	0,00621	0,00654	0,00688	0,00726	0,00768	0,00812	0,00860	0,00914	0,00973
800	0,00842	0,00886	0,00934	0,00986	0,01043	0,01104	0,01170	0,01243	0,01324
1000	0,01071	0,01127	0,01189	0,01256	0,01328	0,01407	0,01492	0,01585	0,01688
1200	0,01309	0,01378	0,01454	0,01537	0,01624	0,01722	0,01827	0,01941	0,02067

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1400	0,01556	0,01639	0,01730	0,01828	0,01932	0,02049	0,02175	0,02311	0,02462
1600	0,01813	0,01910	0,02016	0,02130	0,02253	0,02389	0,02537	0,02697	0,02874
1800	0,02080	0,02192	0,02313	0,02444	0,02586	0,02742	0,02913	0,03099	0,03304
2000	0,02358	0,02485	0,02622	0,02771	0,02933	0,03110	0,03305	0,03518	0,03752
2200	0,02646	0,02789	0,02943	0,03111	0,03295	0,03495	0,03715	0,03956	0,04219
2400	0,02945	0,03105	0,03277	0,03465	0,03672	0,03896	0,04143	0,04413	0,04707
2600	0,03256	0,03434	0,03625	0,03835	0,04065	0,04314	0,04590	0,04891	0,05219
2800	0,03580	0,03777	0,03989	0,04221	0,04475	0,04751	0,05056	0,05390	0,05755
3000	0,03918	0,04134	0,04369	0,04625	0,04903	0,05207	0,05543	0,05912	0,06316
3200	0,04271	0,04507	0,04765	0,05047	0,05350	0,05684	0,06052	0,06458	0,06903
3400	0,04639	0,04896	0,05179	0,05487	0,05818	0,06183	0,06586	0,07030	0,07519
3600	0,05022	0,05302	0,05611	0,05946	0,06308	0,06707	0,07146	0,07631	0,08166
3800	0,05422	0,05727	0,06061	0,06425	0,06821	0,07256	0,07734	0,08262	0,08846
4000	0,05840	0,06171	0,06532	0,06926	0,07358	0,07832	0,08352	0,08926	0,09561
4200	0,06277	0,06655	0,07025	0,07451	0,07922	0,08437	0,09022	0,09624	0,10313
4400	0,06734	0,07120	0,07542	0,08003	0,08514	0,09073	0,09686	0,10358	0,1110
4600	0,07213	0,07629	0,08086	0,08584	0,09136	0,09742	0,10404	0,1113	0,1194
4800	0,07777	0,08165	0,08658	0,09196	0,09790	0,10444	0,1116	0,1195	0,1282
5000	0,08247	0,08730	0,09260	0,09841	0,10478	0,1118	0,1195	0,1281	0,1375
5200	0,08803	0,09324	0,09893	0,10519	0,1120	0,1195	0,1278	0,1371	0,1473
5400	0,09388	0,09948	0,10558	0,1123	0,1197	0,1197	0,1276	0,1366	0,1577
5600	0,10003	0,10603	0,1126	0,1198	0,1278	0,1362	0,1460	0,1568	0,1686
5800	0,10649	0,1129	0,1200	0,1277	0,1363	0,1454	0,1559	0,1674	0,1800
6000	0,1133	0,1202	0,1278	0,1361	0,1453	0,1552	0,1663	0,1785	0,1919
6200	0,1205	0,1279	0,1361	0,1449	0,1547	0,1655	0,1772	0,1902	0,2044
6400	0,1281	0,1360	0,1448	0,1542	0,1647	0,1762	0,1887	0,2024	0,2174
6600	0,1360	0,1446	0,1539	0,1640	0,1752	0,1874	0,2007	0,2152	0,2310
6800	0,1444	0,1536	0,1635	0,1743	0,1862	0,1991	0,2132	0,2285	0,2451
7000	0,1532	0,1630	0,1736	0,1851	0,1977	0,2113	0,2262	0,2423	0,2597
7200	0,1625	0,1729	0,1842	0,1964	0,2097	0,2240	0,2397	0,2566	0,2749
7400	0,1724	0,1834	0,1954	0,2082	0,2222	0,2373	0,2537	0,2715	0,2906
7600	0,1828	0,1944	0,2071	0,2206	0,2353	0,2511	0,2683	0,2869	0,3068
7800	0,1937	0,2059	0,2193	0,2335	0,2489	0,2655	0,2835	0,3028	0,3235
8000	0,2051	0,2180	0,2320	0,2469	0,2631	0,2805	0,2992	0,3192	0,3407
8200	0,2170	0,2306	0,2452	0,2608	0,2778	0,2960	0,3154	0,3361	0,3585
8400	0,2294	0,2437	0,2589	0,2752	0,2930	0,3119	0,3320	0,3535	0,3768

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8600	0,2423	0,2573	0,2731	0,2901	0,3086	0,3283	0,3491	0,3715	0,3956
8800	0,2556	0,2713	0,2878	0,3055	0,3247	0,3452	0,3668	0,3900	0,4149
9000	0,2694	0,2857	0,3030	0,3215	0,3414	0,3626	0,3851	0,4091	0,4348
9200	0,2837	0,3006	0,3187	0,3380	0,3586	0,3805	0,4039	0,4287	0,4553
9400	0,2985	0,3161	0,3349	0,3549	0,3763	0,3990	0,4232	0,4489	0,4763
9600	0,3139	0,3321	0,3517	0,3723	0,3945	0,4180	0,4431	0,4696	0,4979
9800	0,3298	0,3487	0,3690	0,3903	0,4133	0,4376	0,4635	0,4908	0,5200
10000	0,3462	0,3659	0,3868	0,4089	0,4326	0,4577	0,4844	0,5126	0,5427
10200	0,3631	0,3836	0,4051	0,4280	0,4524	0,4783	0,5058	0,5350	0,5660
10400	0,3805	0,4017	0,4239	0,4476	0,4728	0,4995	0,5278	0,5580	0,5899
10600	0,3984	0,4203	0,4433	0,4678	0,4937	0,5213	0,5505	0,5816	0,6144
10800	0,4169	0,4395	0,4633	0,4885	0,5152	0,5437	0,5738	0,6058	0,6396
11000	0,4359	0,4592	0,4838	0,5098	0,5374	0,5667	0,5977	0,6306	0,6654
11200	0,4554	0,4794	0,5048	0,5317	0,5602	0,5903	0,6222	0,6560	0,6918
11400	0,4755	0,5002	0,5264	0,5542	0,5835	0,6145	0,6473	0,6821	0,7189
11600	0,4961	0,5216	0,5486	0,5773	0,6074	0,6393	0,6730	0,7088	0,7467
11800	0,5173	0,5436	0,5714	0,6009	0,6319	0,6647	0,6994	0,7362	0,7751
12000	0,5391	0,5662	0,5948	0,6251	0,6571	0,6908	0,7265	0,7643	0,8042
12200	0,5615	0,5894	0,6188	0,6500	0,6829	0,7175	0,7542	0,7931	0,8341
12400	0,5845	0,6132	0,6434	0,6755	0,7093	0,7449	0,7826	0,8226	0,8647
12600	0,6081	0,6376	0,6687	0,7017	0,7364	0,7730	0,8117	0,8528	0,8960
12800	0,6323	0,6626	0,6946	0,7285	0,7642	0,8018	0,8416	0,8837	0,9280
13000	0,6571	0,6883	0,7212	0,7560	0,7927	0,8312	0,8722	0,9153	0,9608
13500	0,7220	0,7554	0,7906	0,8278	0,8670	0,9084	0,9519	0,9977	1,0464
14000	0,7912	0,8269	0,8645	0,9041	0,8460	0,9904	1,0370	1,0851	1,137
14500	0,8648	0,9029	0,9431	0,9853	1,0300	1,0772	1,126	1,178	1,234
15000	0,9430	0,9836	1,0266	1,0718	1,119	1,169	1,221	1,277	1,336
15500	1,0262	1,0694	1,115	1,163	1,214	1,267	1,323	1,382	1,445
16000	1,115	1,161	1,209	1,260	1,315	1,371	1,431	1,494	1,560
16500	1,209	1,259	1,309	1,363	1,421	1,481	1,545	1,612	1,682
17000	1,309	1,362	1,416	1,473	1,534	1,598	1,666	1,737	1,811
17500	1,415	1,471	1,529	1,590	1,655	1,723	1,794	1,870	1,949
18000	1,527	1,586	1,649	1,714	1,783	1,855	1,931	2,011	2,095
18500	1,647	1,709	1,776	1,845	1,918	1,995	2,076	2,161	2,250
19000	1,774	1,841	1,911	1,984	2,062	2,144	2,229	2,319	2,414
19500	1,909	1,981	2,055	2,133	2,215	2,302	2,392	2,487	2,589

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20000	2,053	2,129	2,208	2,291	2,378	2,469	2,566	2,666	2,774
20500	2,206	2,286	2,370	2,458	2,550	2,647	2,750	2,857	2,970
21000	2,368	2,453	2,542	2,635	2,733	2,836	2,945	3,059	3,179
21500	2,541	2,631	2,725	2,823	2,927	3,037	3,152	3,273	3,401
22000	2,724	2,820	2,919	3,024	3,134	3,250	3,372	3,500	3,636
22500	2,918	3,020	3,125	3,237	3,354	3,477	3,606	3,742	3,886
23000	3,124	3,232	3,344	3,463	3,587	3,718	3,855	3,999	4,152
23500	3,343	3,457	3,577	3,703	3,835	3,974	4,119	4,272	4,434
24000	3,576	3,697	3,825	3,958	4,099	4,246	4,400	4,562	4,734
24500	3,824	3,953	4,088	4,229	4,379	4,535	4,699	4,870	5,053
25000	4,088	4,225	4,368	4,518	4,676	4,842	5,016	5,198	5,392
25500	4,369	4,514	4,666	4,825	4,992	5,168	5,353	5,547	5,752
26000	4,667	4,821	4,982	5,151	5,328	5,515	5,711	5,918	6,134
26500	4,984	5,147	5,318	5,498	5,686	5,884	6,092	6,312	6,541
27000	5,321	5,494	5,676	5,867	6,067	6,277	6,498	6,730	6,974
27500	5,680	5,864	6,056	6,259	6,471	6,695	6,930	7,175	7,434
28000	6,061	6,257	6,461	6,676	6,901	7,139	7,389	7,649	
28500	6,467	6,675	6,892	7,120	7,359	7,611			
29000	6,899	7,119	7,350	7,593					
29500	7,358	7,592							

Продолжение табл. 2

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с								
	800	780	760	740	720	700	680	660	640
1	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0,00155	0,00163	0,00172	0,00182	0,00192	0,00203	0,00215	0,00228	0,00243
200	0,00312	0,00329	0,00347	0,00366	0,00387	0,00409	0,00434	0,00461	0,00491
300	0,00472	0,00498	0,00525	0,00554	0,00585	0,00619	0,00657	0,00699	0,00744
400	0,00636	0,00670	0,00707	0,00746	0,00787	0,00834	0,00885	0,00941	0,01002
500	0,00803	0,00846	0,00892	0,00941	0,00994	0,01053	0,01117	0,01188	0,01265
600	0,00973	0,01024	0,01080	0,01141	0,01206	0,01277	0,01355	0,01440	0,01533
700	0,01147	0,01206	0,01272	0,01345	0,01422	0,01506	0,01598	0,01697	0,01807
800	0,01324	0,01392	0,01469	0,01553	0,01642	0,01739	0,01846	0,01960	0,02087

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
900	0,01504	0,01582	0,01670	0,01765	0,01867	0,01977	0,02098	0,02229	0,02374
1000	0,01688	0,01777	0,01875	0,01981	0,02096	0,02220	0,02355	0,02504	0,02668
1100	0,01876	0,01976	0,02085	0,02202	0,02330	0,02468	0,02618	0,02785	0,02968
1200	0,02067	0,02179	0,02299	0,02428	0,02569	0,02722	0,02888	0,03072	0,03274
1300	0,02262	0,02386	0,02517	0,02659	0,02813	0,02982	0,03165	0,03366	0,03588
1400	0,02462	0,02597	0,02740	0,02894	0,03062	0,03247	0,03448	0,03667	0,03909
1500	0,02666	0,02812	0,02967	0,03134	0,03317	0,03518	0,03737	0,03976	0,04238
1600	0,02874	0,03032	0,03199	0,03379	0,03578	0,03795	0,04033	0,04292	0,04575
1700	0,03087	0,03256	0,03436	0,03630	0,03845	0,04078	0,04335	0,04615	0,04920
1800	0,03304	0,03485	0,03678	0,03887	0,04118	0,04368	0,04644	0,04945	0,05273
1900	0,03526	0,03719	0,03926	0,04150	0,04397	0,04665	0,04960	0,05282	0,05635
2000	0,03752	0,03958	0,04179	0,04419	0,04682	0,04969	0,05283	0,05627	0,06006
2100	0,03983	0,04203	0,04438	0,04695	0,04974	0,05280	0,05614	0,05981	0,06386
2200	0,04219	0,04453	0,04703	0,04977	0,05273	0,05598	0,05953	0,06344	0,06775
2300	0,04460	0,04709	0,04974	0,05265	0,05579	0,05924	0,06301	0,06716	0,07174
2400	0,04707	0,04970	0,05251	0,05559	0,05893	0,06258	0,06657	0,07097	0,07582
2500	0,04960	0,05237	0,05535	0,05860	0,06214	0,06600	0,07022	0,07487	0,08000
2600	0,05219	0,05510	0,05826	0,06168	0,06543	0,06950	0,07396	0,07887	0,08430
2700	0,05485	0,05790	0,06124	0,06484	0,06880	0,07309	0,07780	0,08298	0,08870
2800	0,05755	0,06077	0,06429	0,06808	0,07225	0,07677	0,08174	0,08720	0,09323
2900	0,06033	0,06371	0,06741	0,07140	0,07578	0,08054	0,08578	0,09153	0,09787
3000	0,06316	0,06672	0,07060	0,07481	0,07939	0,08441	0,08991	0,09596	0,10263
3250	0,07054	0,07457	0,07894	0,08367	0,08883	0,09451	0,10075	0,10759	0,1151
3500	0,07839	0,08293	0,08781	0,09309	0,09889	0,10528	0,1123	0,1200	0,1284
3750	0,08674	0,09178	0,09724	0,10315	0,10964	0,1168	0,1245	0,1332	0,1425
4000	0,09561	0,10119	0,10727	0,1139	0,1211	0,1290	0,1376	0,1472	0,1576
4250	0,10506	0,1112	0,11795	0,1253	0,1333	0,1421	0,1516	0,1622	0,1736
4500	0,1152	0,1220	0,1294	0,1375	0,1464	0,1561	0,1666	0,1781	0,1906
4750	0,1260	0,1335	0,1417	0,1506	0,1604	0,1710	0,1825	0,1950	0,2085
5000	0,1375	0,1458	0,1548	0,1646	0,1753	0,1868	0,1993	0,2128	0,2273
5250	0,1498	0,1589	0,1687	0,1794	0,1910	0,2035	0,2170	0,2315	0,2470
5500	0,1630	0,1729	0,1835	0,1951	0,2076	0,2210	0,2355	0,2510	0,2675
5750	0,1770	0,1877	0,1992	0,2117	0,2251	0,2394	0,2549	0,2713	0,2888
6000	0,1919	0,2034	0,2158	0,2291	0,2434	0,2587	0,2751	0,2925	0,3110
6250	0,2076	0,2199	0,2332	0,2474	0,2626	0,2788	0,2961	0,3145	0,3340
6500	0,2241	0,2373	0,2515	0,2665	0,2826	0,2998	0,3180	0,3373	0,3578

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6750	0,2415	0,2556	0,2706	0,2865	0,3035	0,3216	0,3408	0,3610	0,3825
7000	0,2597	0,2747	0,2905	0,3073	0,3252	0,3442	0,3643	0,3855	0,4080
7250	0,2787	0,2944	0,3112	0,3289	0,3477	0,3676	0,3886	0,4109	0,4344
7500	0,2986	0,3151	0,3327	0,3513	0,3710	0,3919	0,4138	0,4371	0,4617
7750	0,3193	0,3367	0,3551	0,3746	0,3952	0,4170	0,4399	0,4642	0,4898
8000	0,3407	0,3590	0,3783	0,3987	0,4202	0,4429	0,4668	0,4921	0,5188
8250	0,3630	0,3821	0,4023	0,4236	0,4461	0,4697	0,4946	0,5209	0,5486
8500	0,3861	0,4061	0,4272	0,4494	0,4728	0,4974	0,5233	0,5506	0,5794
8750	0,4100	0,4309	0,4529	0,4761	0,5004	0,5260	0,5529	0,5813	0,6111
9000	0,4348	0,4566	0,4795	0,5036	0,5289	0,5555	0,5835	0,6129	0,6439
9250	0,4605	0,4832	0,5070	0,5320	0,5583	0,5860	0,6150	0,6455	0,6777
9500	0,4870	0,5106	0,5354	0,5614	0,5887	0,6174	0,6474	0,6791	0,7124
9750	0,5144	0,5389	0,5647	0,5917	0,6200	0,6497	0,6808	0,7137	0,7481
10000	0,5427	0,5682	0,5949	0,6229	0,6522	0,6830	0,7153	0,7493	0,7850
10250	0,5720	0,5984	0,6271	0,6551	0,6854	0,7174	0,7508	0,7860	0,8228
10500	0,6022	0,6295	0,6582	0,6882	0,7197	0,7528	0,7874	0,8238	0,8619
11000	0,6654	0,6954	0,7255	0,7577	0,7914	0,8268	0,8639	0,9027	0,9434
11500	0,7327	0,7641	0,7970	0,8315	0,8675	0,9053	0,9449	0,9863	1,0299
12000	0,8042	0,8378	0,8730	0,9098	0,9483	0,9886	1,0308	1,0750	1,121
12500	0,8802	0,9160	0,9536	0,9929	1,0340	1,0770	1,122	1,169	1,218
13000	0,9608	0,9990	1,0391	1,0811	1,125	1,171	1,219	1,269	1,321
13500	1,0464	1,0870	1,130	1,175	1,221	1,270	1,321	1,374	1,430
14000	1,137	1,181	1,226	1,274	1,323	1,375	1,429	1,486	1,545
14500	1,234	1,281	1,328	1,379	1,431	1,487	1,544	1,605	1,667
15000	1,336	1,386	1,437	1,491	1,546	1,605	1,666	1,730	1,796
15500	1,445	1,497	1,552	1,609	1,668	1,730	1,795	1,863	1,933
16000	1,560	1,615	1,674	1,734	1,797	1,863	1,932	2,005	2,079
16500	1,682	1,741	1,803	1,867	1,934	2,004	2,077	2,155	2,234
17000	1,811	1,875	1,940	2,008	2,079	2,153	2,231	2,313	2,398
17500	1,949	2,016	2,086	2,158	2,233	2,312	2,394	2,480	2,571
18000	2,095	2,165	2,240	2,317	2,397	2,480	2,567	2,658	2,754
18500	2,250	2,324	2,403	2,485	2,570	2,658	2,750	2,848	2,949
19000	2,414	2,493	2,576	2,663	2,753	2,847	2,945	3,049	3,156
19500	2,589	2,672	2,760	2,852	2,947	3,048	3,152	3,262	3,376
20000	2,774	2,862	2,956	3,053	3,154	3,261	3,372	3,488	3,609
20500	2,970	3,064	3,164	3,267	3,374	3,487	3,605	3,728	3,857

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21000	3,179	3,279	3,385	3,494	3,608	3,727	3,852	3,983	4,120
21500	3,401	3,507	3,619	3,735	5,856	3,982	4,114	4,253	4,398
22000	3,636	3,749	3,867	3,991	4,119	4,253	4,393	4,539	4,693
22500	3,886	4,006	4,131	4,262	4,398	4,541	4,689	4,843	5,006
23000	4,152	4,279	4,411	4,550	4,695	4,846	5,003	5,167	5,339
23500	4,434	4,569	4,709	4,856	5,010	5,170	5,337	5,512	5,694
24000	4,734	4,877	5,026	5,182	5,345	5,515	5,692	5,878	6,071
24500	5,053	5,205	5,363	5,528	5,701	5,881	6,069	6,266	6,472
25000	5,392	5,553	5,721	5,896	6,079	6,270	6,470	6,679	6,898
25500	5,752	5,923	6,101	6,287	6,481	6,684	6,896	7,118	7,350
26000	6,134	6,315	6,505	6,703	6,909	7,124	7,349	7,584	
26500	6,541	6,733	6,935	7,145	7,364	7,592			
27000	6,974	7,178	7,392	7,615					
27500	7,434	7,651							

Таблица 3

Значения вспомогательной функции Сиаччи $f_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X}$

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с									
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900	850
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81
500	10,22	10,23	10,23	10,23	10,24	10,24	10,25	10,25	10,26	10,27
1000	10,67	10,68	10,68	10,69	10,70	10,71	10,72	10,73	10,75	10,78
1500	11,14	11,15	11,16	11,18	11,19	11,21	11,23	11,26	11,29	11,33
2000	11,65	11,66	11,68	11,70	11,72	11,75	11,79	11,83	11,88	11,94
2250	11,92	11,93	11,96	11,98	12,00	12,04	12,09	12,13	12,20	12,27
2500	12,20	12,22	12,24	12,27	12,30	12,34	12,40	12,45	12,53	12,61
2750	12,49	12,52	12,53	12,57	12,61	12,66	12,72	12,79	12,87	12,97
3000	12,79	12,82	12,84	12,88	12,93	12,99	13,06	13,14	13,24	13,35
3250	13,10	13,13	13,16	13,21	13,27	13,34	13,41	13,51	13,63	13,75
3500	13,43	13,46	13,50	13,55	13,62	13,70	13,79	13,90	14,03	14,18
3750	13,77	13,80	13,85	13,91	13,99	14,08	14,19	14,31	14,45	14,63
4000	14,12	14,16	14,22	14,29	14,38	14,48	14,60	14,74	14,90	15,10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4250	14,49	14,54	14,61	14,69	14,78	14,90	15,03	15,19	15,37	15,60
4500	14,88	14,94	15,01	15,10	15,21	15,34	15,49	15,67	15,87	16,12
4750	15,29	15,36	15,43	15,53	15,66	15,81	15,98	16,18	16,40	16,68
5000	15,71	15,79	15,88	15,99	16,13	16,30	16,49	16,71	16,97	17,27
5250	16,15	16,24	16,35	16,47	16,63	16,82	17,03	17,27	17,57	17,90
5500	16,62	16,72	16,84	16,98	17,16	17,37	17,61	17,87	18,21	18,57
5750	17,11	17,23	17,36	17,52	17,72	17,95	18,22	18,52	18,89	19,28
6000	17,63	17,76	17,91	18,09	18,31	18,57	18,87	19,21	19,60	20,02
6250	18,17	18,32	18,49	18,69	18,94	19,23	19,56	19,94	20,36	20,80
6500	18,74	18,90	19,10	19,33	19,60	19,92	20,30	20,71	21,16	21,62
6750	19,34	19,52	19,75	20,01	20,31	20,66	21,08	21,52	22,00	22,47
7000	19,98	20,18	20,43	20,72	21,06	21,45	21,90	22,38	22,87	23,34
7250	20,66	20,88	21,16	21,48	21,83	22,29	22,77	23,27	23,77	24,24
7500	21,37	21,62	21,93	22,29	22,70	23,17	23,68	24,20	24,70	25,15
7750	22,12	22,41	22,75	23,15	23,60	24,10	24,63	25,16	25,65	26,08
8000	22,93	23,25	23,63	24,07	24,55	25,08	25,63	26,16	26,63	27,02
8250	23,79	24,14	24,56	25,04	25,55	26,10	26,66	27,18	27,63	27,97
8500	24,70	25,09	25,55	26,06	26,60	27,16	27,72	28,23	28,64	28,94
8750	25,67	26,10	26,60	27,14	27,70	28,26	28,81	29,30	29,67	29,92
9000	26,70	27,17	27,70	28,27	28,84	29,40	29,93	30,38	30,72	30,91
9250	27,79	28,30	28,86	29,44	30,01	30,56	31,07	31,48	31,78	31,91
9500	28,95	29,48	30,06	30,65	31,22	31,75	32,24	32,61	32,85	32,93
9750	30,17	30,72	31,31	31,90	32,46	32,97	33,43	33,75	33,94	33,96
10000	31,45	32,02	32,61	33,19	33,73	34,22	34,63	34,91	35,04	34,99
10500	34,17	34,75	35,33	35,86	36,36	36,78	37,09	37,27	37,28	37,10
11000	37,08	37,64	38,18	38,66	39,09	39,42	39,63	39,69	39,58	39,26
11500	40,17	40,68	41,16	41,57	41,91	42,14	42,24	42,18	41,94	41,48
12000	43,42	43,87	44,26	44,59	44,83	44,95	44,93	44,74	44,36	43,75
12500	46,81	47,19	47,49	47,72	47,85	47,85	47,70	47,37	46,84	46,08
13000	50,34	50,63	50,84	50,95	50,96	50,83	50,55	50,08	49,39	48,47
13500	54,01	54,20	54,31	54,30	54,18	53,91	53,48	52,86	52,02	50,94
14000	57,82	57,90	57,89	57,76	57,50	57,09	56,51	55,73	54,73	53,49
14500	61,78	61,73	61,59	61,33	60,93	60,37	59,63	58,69	57,53	56,13
15000	65,88	65,69	65,41	65,01	64,46	63,75	62,86	61,76	60,43	58,86
15500	70,13	69,79	69,37	68,82	68,12	67,25	66,20	64,94	63,44	61,88
16000	74,53	74,05	73,47	72,77	71,92	70,89	69,66	68,22	66,54	64,60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16500	79,09	78,47	77,73	76,87	75,85	74,65	73,25	71,63	69,77	67,64
17000	83,83	83,05	82,15	81,12	79,93	78,55	76,97	75,17	73,12	70,8
17500	88,75	87,81	86,74	85,53	84,16	82,60	80,84	78,85	76,60	74,08
18000	93,86	92,75	91,50	90,11	88,55	86,81	84,86	82,67	80,22	77,50
18500	99,18	97,89	96,45	94,87	93,12	91,19	89,04	86,64	83,99	81,06
19000	104,7	103,2	101,6	99,81	97,87	95,74	93,39	90,79	87,92	84,77
19500	110,4	108,7	106,9	104,9	102,8	100,5	97,93	95,12	92,02	88,64
20000	116,4	114,5	112,5	110,3	108,0	105,4	102,7	99,62	96,30	92,68
20500	122,7	120,6	118,3	115,9	113,4	110,6	107,6	104,3	100,8	96,90
21000	129,2	126,9	124,4	121,8	119,0	116,0	112,7	109,2	105,4	101,3
21500	136,0	133,5	130,8	127,9	124,9	121,6	118,1	114,3	110,2	105,9
22000	143,1	140,3	137,4	134,3	131,0	127,5	123,8	119,7	115,3	110,7
22500	150,5	147,5	144,3	141,0	137,4	133,7	129,7	125,3	120,7	115,8
23000	158,3	155,0	151,6	148,0	144,2	140,2	135,9	131,2	126,3	121,1
23500	166,4	162,9	159,2	155,3	151,2	146,9	142,3	137,3	132,2	126,7
24000	174,9	171,1	167,1	162,9	158,5	153,9	149,0	143,8	138,4	132,6
24500	183,8	179,7	175,4	170,9	166,2	161,3	156,1	150,6	144,8	138,6
25000	193,1	188,7	184,1	179,3	174,3	169,0	163,5	157,7	151,5	144,9
25500	202,8	198,1	193,2	188,2	182,8	177,2	171,3	165,1	158,6	151,6
26000	213,0	208,0	202,8	197,4	191,7	185,7	179,5	172,9	166,0	158,7
26500	223,7	218,4	212,8	207,0	201,0	194,7	188,1	181,1	173,8	166,1
27000	235,0	229,3	223,3	217,1	210,7	204,1	197,1	189,7	182,0	173,9
27500	246,8	240,7	234,4	227,8	221,0	214,0	206,6	198,8	190,6	182,1
28000	259,2	252,7	246,0	239,0	231,8	224,3	216,5	208,3	199,7	190,7
28500	272,2	265,3	258,1	250,7	243,1	235,3	226,9	218,3	209,2	
29000	285,9	278,5	270,9	263,1	255,0	246,6	237,9	228,8		
29500	300,3	292,4	284,4	276,1	267,6	258,6	249,5			
30000	315,4	307,1	298,6	289,8	280,8	271,4				
30500	331,3	322,6	313,5	304,2	294,6					
31000	348,1	338,8	329,2	319,4						
31500	365,8	355,9	345,7							
32000	384,4	373,8								
32500	403,9									

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с									
	850	800	775	750	725	700	675	650	625	600
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81
250	10,03	10,04	10,04	10,04	10,05	10,06	10,07	10,07	10,07	10,07
500	10,27	10,29	10,29	10,30	10,31	10,32	10,33	10,34	10,35	10,36
750	10,52	10,55	10,55	10,56	10,58	10,59	10,61	10,62	10,64	10,66
1000	10,78	10,81	10,82	10,84	10,86	10,88	10,90	10,92	10,95	10,97
1250	11,05	11,09	11,10	11,13	11,15	11,18	11,21	11,23	11,27	11,30
1500	11,33	11,38	11,40	11,43	11,46	11,50	11,53	11,56	11,60	11,64
1750	11,63	11,69	11,71	11,75	11,79	11,83	11,87	11,91	11,95	12,00
2000	11,94	12,01	12,04	12,08	12,13	12,18	12,23	12,28	12,33	12,39
2250	12,27	12,35	12,39	12,43	12,49	12,55	12,61	12,67	12,73	12,80
2500	12,61	12,70	12,75	12,81	12,87	12,94	13,01	13,08	13,15	13,23
2750	12,97	13,07	13,13	13,21	13,27	13,35	13,43	13,51	13,60	13,69
3000	13,35	13,47	13,54	13,62	13,70	13,79	13,88	13,97	14,07	14,17
3250	13,75	13,89	13,97	14,06	14,15	14,26	14,36	14,46	14,57	14,68
3500	14,18	14,33	14,41	14,52	14,63	14,75	14,86	14,97	15,09	15,21
3750	14,63	14,80	14,90	15,01	15,14	15,27	15,39	15,51	15,64	15,76
4000	15,10	15,30	15,41	15,53	15,67	15,82	15,95	16,09	16,21	16,33
4250	15,60	15,83	15,95	16,09	16,24	16,40	16,54	16,68	16,80	16,91
4500	16,12	16,39	16,53	16,68	16,84	17,01	17,16	17,30	17,41	17,50
4750	16,68	16,98	17,14	17,30	17,47	17,65	17,80	17,93	18,03	18,09
5000	17,27	17,61	17,78	17,96	18,14	18,31	18,46	18,58	18,66	18,69
5250	17,90	18,27	18,46	18,65	18,83	18,99	19,13	19,24	19,29	19,29
5500	18,57	18,97	19,17	19,36	19,54	19,69	19,82	19,90	19,93	19,89
5750	19,28	19,70	19,91	20,09	20,27	20,40	80,51	20,57	20,56	20,49
6000	20,02	20,46	20,67	20,85	21,01	21,13	21,21	21,24	21,20	21,09
6250	20,80	21,25	21,45	21,62	21,76	21,86	21,91	21,91	21,83	21,69
6500	21,62	22,06	22,25	22,41	22,53	22,60	22,62	22,58	22,47	22,29
6750	22,47	22,89	23,07	23,21	23,30	23,34	23,33	23,25	23,11	22,89
7000	23,34	23,74	23,90	24,01	24,08	24,09	24,04	23,93	23,75	23,49
7500	25,15	25,48	25,59	25,64	25,65	25,60	25,48	25,30	25,04	24,70
8000	27,02	27,26	27,31	27,30	27,24	27,13	26,94	26,68	26,34	25,92
8500	28,94	29,07	29,06	28,99	28,87	28,68	28,41	28,07	27,66	27,17
9000	30,91	30,92	30,85	30,71	30,52	30,25	29,91	29,49	29,00	28,43
9500	32,93	32,81	32,67	32,46	32,19	31,85	31,43	30,93	30,36	29,71
10000	34,99	34,74	34,52	34,24	33,90	33,48	32,98	32,40	31,75	31,01

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10500	37,10	36,71	36,41	36,06	35,64	35,14	34,56	33,90	33,17	32,35
11000	39,26	38,72	38,35	37,92	37,42	36,84	36,18	35,44	34,63	33,73
11500	41,48	40,78	40,34	39,82	39,24	38,58	37,84	37,03	36,13	35,15
12000	43,75	42,90	42,38	41,78	41,11	40,37	39,55	38,66	37,68	36,62
12500	46,08	45,07	44,47	43,79	43,04	42,22	41,32	40,34	39,28	38,13
13000	48,47	47,30	46,62	45,86	45,03	44,13	43,15	42,08	40,93	39,70
13500	50,94	49,61	48,84	48,00	47,09	46,10	45,03	43,87	42,64	41,32
14000	53,49	51,99	51,14	50,21	49,21	48,13	46,97	45,73	44,41	43,00
14500	56,13	54,45	53,51	52,49	51,40	50,23	48,98	47,66	46,25	44,75
15000	58,86	57,00	55,96	54,85	53,67	52,42	51,08	49,66	48,16	46,57
15500	61,68	59,64	58,51	57,31	56,04	54,69	53,26	51,74	50,14	48,46
16000	64,60	62,38	61,16	59,87	58,50	57,05	55,52	53,91	52,21	50,43
16500	67,64	65,23	63,91	62,52	61,05	59,50	57,87	56,16	54,36	52,48
17000	70,80	68,19	66,77	65,28	63,71	62,06	60,32	58,50	56,60	54,62
17500	74,08	71,27	69,75	68,16	66,48	64,72	62,88	60,95	58,94	56,86
18000	77,50	74,49	72,86	71,16	69,37	67,50	65,55	63,51	61,39	59,19
18500	81,06	77,84	76,10	74,28	72,38	70,40	68,34	66,19	63,95	61,63
19000	84,77	81,32	79,47	77,54	75,53	73,43	71,25	68,98	66,62	64,18
19500	88,64	84,95	82,99	80,95	78,81	76,59	74,29	71,90	69,41	66,84
20000	92,68	88,75	86,67	84,50	82,24	79,90	77,47	74,95	72,33	69,63
20500	96,90	92,72	90,51	88,21	85,83	83,36	80,79	78,14	75,39	72,55
21000	101,3	96,88	93,53	92,10	89,58	86,97	84,27	81,48	78,59	75,61
21500	105,9	101,2	98,74	96,17	93,50	90,75	87,91	84,97	81,94	78,81
22000	110,7	105,8	103,2	100,4	97,62	94,72	91,72	88,63	85,45	82,17
22500	115,8	110,5	107,8	104,9	102,0	98,89	95,72	92,48	89,13	85,69
23000	121,1	115,5	112,6	109,6	106,5	103,3	99,92	96,52	92,99	89,38
23500	126,7	120,7	117,7	114,5	111,2	107,8	104,3	100,7	97,03	93,25
24000	132,6	126,2	123,1	119,6	116,2	112,6	108,9	105,2	101,3	97,32
24500	138,6	132,0	128,7	125,0	121,4	117,6	113,8	109,8	105,7	101,6
25000	144,9	138,0	134,5	130,7	126,9	122,9	118,9	114,8	110,4	106,1
25500	151,6	144,3	140,6	136,7	132,7	128,5	124,2	119,8	115,3	110,7
26000	158,7	151,0	147,0	142,9	138,7	134,3	129,8	125,1		
26500	166,1	158,0	153,8	149,5	145,0	140,4				
27000	173,9	165,3	160,9	156,4						
27500	182,1	173,0	168,4							
28000	190,6									

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,042	1,042	1,042	1,043	1,043	1,043	1,044	1,045	1,046
1000	1,086	1,086	1,087	1,088	1,089	1,090	1,092	1,094	1,096
1500	1,132	1,133	1,135	1,136	1,138	1,140	1,143	1,146	1,149
2000	1,181	1,183	1,185	1,187	1,190	1,193	1,197	1,202	1,207
2500	1,233	1,235	1,238	1,242	1,246	1,250	1,256	1,263	1,270
3000	1,288	1,291	1,295	1,300	1,306	1,312	1,320	1,329	1,339
3500	1,347	1,351	1,357	1,363	1,371	1,380	0,390	1,401	1,414
4000	1,410	1,416	1,424	1,432	1,442	1,453	1,466	1,480	1,496
4500	1,478	1,486	1,496	1,507	1,519	1,533	1,549	1,567	1,587
5000	1,552	1,562	1,574	1,588	1,603	1,620	1,640	1,662	1,686
5500	1,632	1,645	1,659	1,676	1,695	1,716	1,740	1,765	1,792
6000	1,719	1,735	1,753	1,774	1,797	1,822	1,849	1,877	1,903
6500	1,815	1,834	1,856	1,881	1,908	1,936	1,966	1,993	2,007
7000	1,920	1,943	1,969	1,997	2,027	2,058	2,084	2,097	2,089
7500	2,034	2,062	2,091	2,122	2,153	2,178	2,189	2,178	2,146
8000	2,159	2,190	2,221	2,251	2,274	2,281	2,267	2,234	2,185
8500	2,293	2,325	2,353	2,370	2,372	2,356	2,321	2,272	2,212
9000	2,432	2,455	2,467	2,464	2,443	2,406	2,357	2,298	2,232
9500	2,561	2,566	2,556	2,530	2,491	2,441	2,383	2,318	2,249
10000	2,662	2,646	2,617	2,575	2,524	2,466	2,402	2,334	2,263
10500	2,733	2,700	2,657	2,605	2,547	2,484	2,417	2,347	2,277
11000	2,781	2,736	2,684	2,626	2,564	2,498	4,430	2,361	2,292
11500	2,813	2,761	2,703	2,642	2,577	2,511	2,444	2,376	2,308
12000	2,835	2,778	2,717	2,654	2,589	2,523	2,457	2,391	2,326
12500	2,850	2,790	2,728	2,665	2,601	2,536	2,471	2,407	2,345
13000	2,861	2,801	2,739	2,676	2,613	2,550	2,487	2,425	2,365
13500	2,871	2,811	2,750	2,688	2,626	2,565	2,505	2,445	2,387
14000	2,880	2,821	2,761	2,701	2,641	2,582	2,524	2,467	2,411
14500	2,890	2,832	2,773	2,715	2,658	2,601	2,545	2,490	2,437

Таблица 4

Сиаччи $f_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\theta_c}{\operatorname{tg}\theta_0}$

снаряда v_0, м/с									
850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,047	1,048	1,049	1,051	1,053	1,055	1,058	1,061	1,062	1,062
1,098	1,101	1,103	1,107	1,111	1,116	1,122	1,127	1,128	1,129
1,153	1,158	1,163	1,169	1,176	1,184	1,192	1,197	1,197	1,197
1,213	1,220	1,228	1,237	1,247	1,257	1,266	1,270	1,267	1,256
1,278	1,288	1,299	1,311	1,324	1,336	1,344	1,338	1,323	1,297
1,350	1,363	1,377	1,392	1,407	1,419	1,419	1,388	1,359	1,325
1,429	1,445	1,462	1,480	1,495	1,500	1,478	1,422	1,386	1,348
1,514	1,534	1,554	1,572	1,581	1,565	1,516	1,446	1,408	1,369
1,608	1,631	1,651	1,663	1,652	1,609	1,544	1,467	1,428	1,390
1,710	1,733	1,747	1,739	1,701	1,640	1,566	1,487	1,448	1,412
1,816	1,832	1,825	1,791	1,734	1,663	1,585	1,507	1,470	1,435
1,919	1,913	1,880	1,826	1,758	1,682	1,604	1,528	1,493	1,460
2,000	1,969	1,918	1,852	1,778	1,700	1,623	1,551	1,517	1,486
2,058	2,008	1,945	1,872	1,795	1,718	1,644	1,575	1,543	1,513
2,097	2,035	1,965	1,890	1,813	1,737	1,666	1,600	1,570	1,541
2,124	2,056	1,983	1,907	1,831	1,758	1,690	1,627	1,598	1,571
2,145	2,073	1,999	1,924	1,850	1,780	1,715	1,655	1,627	1,602
2,162	2,089	2,015	1,942	1,871	1,804	1,741	1,684	1,658	1,634
2,177	2,104	2,032	1,961	1,893	1,829	1,769	1,715	1,690	1,668
2,191	2,120	2,050	1,982	1,917	1,855	1,798	1,747	1,724	1,703
2,207	2,138	2,070	2,004	1,942	1,883	1,829	1,780	1,758	1,738
2,224	2,157	2,091	2,028	1,969	1,912	1,861	1,814	1,793	1,774
2,242	2,177	2,114	2,054	1,997	1,943	1,894	1,850	1,830	1,811
2,262	2,199	2,139	2,082	2,027	1,975	1,928	1,886	1,867	1,849
2,283	2,223	2,165	2,111	2,059	2,009	1,964	1,923	1,905	1,888
2,306	2,248	2,193	2,141	2,091	2,044	2,001	1,962	1,945	1,929
2,330	2,275	2,222	2,172	2,124	2,080	2,039	2,002	1,985	1,970
2,356	2,304	2,253	2,205	2,159	2,117	2,078	2,042	2,026	2,012
2,384	2,334	2,286	2,240	2,196	2,155	2,117	2,083	2,068	2,054

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
15000	2,900	2,843	2,786	2,730	2,676	2,622	2,568	2,515	2,464
16000	2,925	2,873	2,821	2,769	2,718	2,668	2,618	2,570	2,523
17000	2,958	2,910	2,862	2,814	2,767	2,721	2,675	2,631	2,588
18000	2,998	2,954	2,910	2,866	2,823	2,780	2,739	2,698	2,658
19000	3,046	3,005	2,965	2,925	2,885	2,846	2,808	2,770	2,734
20000	3,101	3,063	3,026	2,990	2,953	2,918	2,882	2,848	2,815
21000	3,162	3,128	3,094	3,060	3,027	2,995	2,962	2,930	2,900
22000	3,230	3,199	3,167	3,236	3,106	3,076	3,046	3,017	2,989
23000	3,304	3,277	3,246	3,218	3,190	3,162	3,135	3,108	3,082
24000	3,383	3,356	3,330	3,304	3,278	3,253	3,228	3,203	3,179
25000	3,367	3,442	3,418	3,394	3,370	3,347	3,324	3,302	3,280
26000	3,556	3,533	3,511	3,489	3,467	3,446			
27000	3,649	3,628	3,608	3,588					
28000	3,746								

снаряда v_0, м/с									
850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
2,414	2,366	2,319	2,275	2,233	2,194	2,158	2,126	2,111	2,098
2,477	2,433	2,390	2,350	2,312	2,276	2,243	2,213	2,199	2,187
2,546	2,505	2,466	2,429	2,394	2,361	2,331	2,303	2,291	2,280
2,620	2,583	2,547	2,513	2,480	2,450	2,422	2,397	2,386	2,375
2,699	2,665	2,632	2,601	2,571	2,543	2,517	2,494	2,483	
2,782	2,751	2,721	2,692	2,665	2,639	2,615			
2,870	2,841	2,813	2,787	2,762					
2,962	2,935	2,909	2,885						
3,057	3,033								
3,156									

Таблица 5

Значения вспомогательной функции Сиаччи $f_3 = \dfrac{v_0 \sin \theta_0}{T}$

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с									
	1100	1000	950	900	850	800	750	700	650	600
0	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905	4,905
500	4,958	4,959	4,960	4,961	4,962	4,963	4,965	4,967	4,969	4,971
1000	5,015	5,017	5,019	5,021	5,024	5,027	5,031	5,035	5,040	5,045
1500	5,075	5,079	5,082	5,086	5,091	5,096	5,102	5,109	5,117	5,127
2000	5,139	5,146	5,150	5,155	5,163	5,170	5,179	5,189	5,201	5,216
2500	5,207	5,217	5,223	5,230	5,240	5,250	5,262	5,276	5,293	5,313
3000	5,280	5,293	5,301	5,311	5,323	5,337	5,353	5,372	5,394	5,421
3500	5,358	5,375	5,386	5,399	5,414	5,432	5,453	5,478	5,508	5,547
4000	5,442	5,463	5,447	5,494	5,513	5,536	5,563	5,596	5,640	5,696
4500	5,532	5,559	5,576	5,597	5,622	5,651	5,686	5,733	5,794	5,862
5000	5,630	5,664	5,685	5,711	5,743	5,781	5,829	5,894	5,968	6,035
5500	5,736	5,778	5,805	5,838	5,878	5,930	5,997	6,076	6,153	6,209
6000	5,852	5,904	5,939	5,981	6,034	6,105	6,188	6,271	6,341	6,380
6500	5,997	6,044	6,090	6,147	6,219	6,305	6,393	6,471	6,527	6,546
7000	6,117	6,204	6,265	6,341	6,429	6,519	6,604	6,670	6,708	6,707
7500	6,275	6,390	6,470	6,559	6,653	6,740	6,815	6,867	6,885	6,863
8000	6,456	6,606	6,698	6,793	6,884	6,963	7,024	7,059	7,058	7,015
8500	6,668	6,846	6,941	7,034	7,117	7,185	7,230	7,247	7,227	7,163
9000	6,908	7,100	7,192	7,277	7,350	7,404	7,433	7,431	7,392	7,307
9500	7,169	7,360	7,446	7,521	7,582	7,620	7,632	7,611	7,553	7,449
10000	7,442	7,624	7,701	7,764	7,811	7,833	7,827	7,788	7,711	7,589
10500	7,723	7,889	7,955	8,005	8,036	8,042	8,019	7,963	7,868	7,728
11000	8,008	8,154	8,207	8,243	8,258	8,248	8,208	8,135	8,023	7,866
11500	8,294	8,417	8,457	8,478	8,478	8,451	8,395	8,305	8,177	8,004
12000	8,580	8,678	8,704	8,711	8,695	8,652	8,580	8,474	8,330	8,142
12500	8,865	8,937	8,949	8,941	8,910	8,852	8,764	8,643	8,484	8,281
13000	9,149	9,194	9,192	9,170	9,124	9,051	8,948	8,812	8,638	8,420
13500	9,431	9,450	9,434	9,397	9,336	9,249	9,131	8,980	8,792	8,560
14000	9,712	9,704	9,674	9,623	9,548	9,446	9,314	9,150	8,947	8,702
14500	9,991	9,957	9,913	9,848	9,760	9,644	9,498	9,320	9,104	8,846

$c'X$	Начальные скорости снаряда v_0, м/с									
	1100	1000	950	900	850	800	750	700	650	600
15000	10,27	10,21	10,15	10,07	9,972	9,843	9,683	9,491	9,262	8,992
16000	10,83	10,71	10,63	10,53	10,40	10,24	10,06	9,841	9,587	9,291
17000	11,38	11,22	11,11	10,98	10,83	10,65	10,44	10,20	9,921	9,601
18000	11,94	11,73	11,60	11,45	11,27	11,07	10,84	10,57	10,27	9,925
19000	12,51	12,25	12,10	11,93	11,73	11,50	11,25	10,96	10,63	10,26
20000	13,09	12,79	12,61	12,42	12,20	11,95	11,67	11,36	11,01	10,62
21000	13,68	13,34	13,14	12,92	12,68	12,41	12,11	11,77	11,40	
22000	14,29	13,91	13,69	13,45	13,18	12,89	12,57	12,21		
23000	14,93	14,50	14,26	14,00	13,71	13,40				
24000	15,58	15,12	14,86	14,57	14,26					

c/X	Начальные скорости						
	1200	1100	1000	950	900	850	800
0	1200	1100	1000	950	900	850	800
500	1128	1032	937	889	841	793	746
1000	1059	968	877	830	785	738	693
1500	993	906	819	774	731	686	642
2000	930	847	763	721	679	636	593
2500	870	791	710	670	629	588	547
3000	813	736	659	620	581	542	503
3500	758	684	610	572	535	498	461
4000	704	634	562	526	491	456	421
4500	653	586	517	483	449	416	384
5000	604	540	474	442	410	380	352
5500	558	496	434	404	375	348	327
6000	513	454	396	369	344	324	310
6500	470	415	362	339	321	308	297
7000	430	378	334	318	306	296	286
7500	392	347	315	304	294	284	275
8000	359	324	301	292	283	274	265
8500	332	308	289	281	272	264	255
9000	313	295	278	270	262	254	246
9500	300	284	268	260	252	245	237
10000	288	273	259	251	243	236	228
10500	277	263	249	242	234	227	220
11000	267	253	240	233	226	219	212
11500	257	244	231	224	217	211	204
12000	248	235	222	216	209	203	196
12500	239	227	214	208	202	196	189
13000	230	218	206	200	194	188	182
13500	222	210	199	193	187	182	176
14000	213	203	193	186	180	175	169
14500	206	195	185	179	174	168	163
15000	198	188	178	173	168	162	157
16000	184	175	165	160	155	151	146
17000	171	162	153	149	144	140	135
18000	158	150	142	138	134	130	126
19000	147	140	132	128	124	120	117

Сиаччи $f_4 = \dfrac{v_0 \cos \theta_c}{\cos \theta_0}$

снаряда v_0, м/с							
750	700	650	600	550	500	450	400
750	700	650	600	550	500	450	400
697	649	601	553	506	458	411	366
646	600	554	509	463	418	375	337
598	554	510	466	423	382	345	316
552	509	467	426	386	350	321	302
507	466	427	389	354	325	306	290
464	426	390	356	328	309	294	279
424	389	357	330	311	296	283	269
387	356	330	312	298	285	272	259
354	330	312	299	286	274	262	250
329	312	299	287	276	264	252	241
311	299	287	276	266	254	243	232
298	287	276	266	256	245	234	223
287	276	266	256	246	236	226	215
276	266	256	247	237	227	218	207
266	256	247	238	229	219	210	200
256	247	238	229	220	211	202	192
247	238	229	221	212	203	194	185
238	229	221	213	204	196	187	179
229	221	213	205	197	188	181	172
220	213	205	197	190	182	174	166
212	205	198	190	183	175	168	160
205	197	190	183	176	169	162	154
197	190	183	177	170	163	156	148
190	183	177	170	163	157	150	143
183	177	170	164	157	151	144	138
176	170	164	158	152	145	139	133
170	164	158	152	146	140	134	128
164	158	152	147	141	135	129	123
158	152	147	141	136	130	124	118
152	147	141	136	131	125	120	114
141	136	131	126	121	116	111	106,0
131	126	122	117	112	108	103,2	98,1
121	117	113	109	104,5	100,2	95,8	
113	109	104,9	100,9	97,9	93,0		

$c'X$	Начальные скорости						
	1200	1100	1000	950	900	850	800
20000	137	130	123	119	115	112	108
21000	127	121	114	110	107,1	103,8	100,5
22000	118	112	105,5	102,5	99,4	96,3	93,2
23000	109	103,6	98,0	95,1	92,3	89,4	86,5
24000	101,3	96,1	90,9	88,3	85,6	83,0	
25000	94,0	89,2	84,3	82,0			
26000	87,3	82,8					
27000	81,0						

Значения вспомогательной

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
500	0,5051	0,5052	0,5052	0,5052	0,5052	0,5053	0,5054	0,5055	0,5056
1000	0,5103	0,5104	0,5104	0,5105	0,5106	0,5107	0,5110	0,5112	0,5114
1500	0,5155	0,5156	0,5157	0,5159	0,5161	0,5163	0,5167	0,5170	0,5174
2000	0,5208	0,5209	0,5211	0,5214	0,5217	0,5220	0,5225	0,5230	0,5235
2500	0,5261	0,5263	0,5266	0,5270	0,5274	0,5279	0,5285	0,5291	0,5298
3000	0,5316	0,5319	0,5323	0,5328	5,5333	0,5339	0,5346	0,5354	0,5364
3500	0,5372	0,5376	0,5381	0,5387	0,5393	0,5401	0,5410	0,5420	0,5432
4000	0,5428	0,5434	0,5440	0,5447	0,5455	0,5465	0,5476	0,5489	0,5502
4500	0,5486	0,5493	0,5501	0,5510	0,5520	0,5531	0,5545	0,5560	0,5575
5000	0,5546	0,5555	0,5564	0,5575	0,5587	0,5600	0,5616	0,5633	0,5651
5500	0,5608	0,5619	0,5630	0,5642	0,5656	0,5672	0,5690	0,5709	0,5729
6000	0,5672	0,5685	0,5698	0,5712	0,5728	0,5746	0,5766	0,5787	0,5808
6500	0,5739	0,5753	0,5768	0,5785	0,5803	0,5823	0,5844	0,5865	0,5884
7000	0,5808	0,5824	0,5841	0,5860	0,5880	0,5901	0,5922	0,5940	0,5952

снаряда v_0, м/с							
750	700	650	600	550	500	450	400
104,6	101,0	97,3	93,7	90,0			
97,1	93,8	90,3					
90,1	87,0						

Таблица 7

функции Сиаччи $f_5 = \dfrac{x_s}{X}$

снаряда v_0, м/с									
850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,5057	0,5059	0,5061	0,5063	0,5065	0,5067	0,5068	0,5070	0,5071	0,5073
0,5116	0,5119	0,5123	0,5128	0,5133	0,5137	0,5140	0,5145	0,5148	0,5150
0,5177	0,5182	0,5188	0,5196	0,5203	0,5210	0,5217	0,5223	0,5225	0,5225
0,5240	0,5248	0,5256	0,5266	0,5275	0,5285	0,5297	0,5300	0,5297	0,5290
0,5305	0,5316	0,5326	0,5338	0,5350	0,5362	0,5376	0,5370	0,5358	0,5336
0,5373	0,5386	0,5399	0,5413	0,5427	0,5439	0,5447	0,5424	0,5399	0,6361
0,5444	0,5459	0,5474	0,5490	0,5505	0,5514	0,5505	0,5458	0,5418	0,5371
0,5517	0,5534	0,5552	0,5568	0,5581	0,5579	0,5546	0,5474	0,5425	0,5376
0,5592	0,5611	0,5631	0,5644	0,5648	0,5627	0,5569	0,5479	0,5429	0,5385
0,5670	0,5960	0,5707	0,5713	0,5700	0,5655	0,5576	0,5480	0,5435	0,5397
0,5749	0,5768	0,5776	0,5768	0,5733	0,5665	0,5574	0,5483	0,5444	0,5412
0,5826	0,5837	0,5832	0,5804	0,5748	0,5664	0,5570	0,5490	0,5457	0,5430
0,5896	0,5892	0,5871	0,5822	0,5749	0,5658	0,5570	0,5501	0,5473	0,5450
0,5952	0,5931	0,5892	0,5826	0,5742	0,5653	0,5575	0,5515	0,5491	0,5472

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
7500	0,5880	0,5897	0,5916	0,5938	0,5958	0,5979	0,5997	0,6008	0,6008
8000	0,5954	0,5974	0,5994	0,6015	0,6035	0,6053	0,6063	0,6063	0,6048
8500	0,6031	0,6052	0,6072	0,6091	0,6107	0,6117	0,6116	0,6102	0,6071
9000	0,6109	0,6128	0,6146	0,6161	0,6169	0,6167	0,6153	0,6125	0,6080
9500	0,6185	0,6201	0,6213	0,6220	0,6217	0,6202	0,6175	0,6133	0,6077
10000	0,6255	0,6265	0,6269	0,6264	0,6249	0,6222	0,6183	0,6129	0,6066
10500	0,6315	0,6317	0,6310	0,6294	0,6267	0,6229	0,6179	0,6118	0,6051
11000	0,6362	0,6354	0,6337	0,6309	0,6272	0,6225	0,6167	0,6103	0,6036
11500	0,6395	0,6377	0,6350	0,6313	0,6267	0,6213	0,6151	0,6087	0,6023
12000	0,6415	0,6387	0,6351	0,6307	0,6254	0,6196	0,6134	0,6073	0,6014
12500	0,6422	0,6386	0,6343	0,6293	0,6237	0,6178	0,6119	0,6063	0,6010
13000	0,6418	0,6376	0,6328	0,6275	0,6219	0,6162	0,6108	0,6057	0,6010
13500	0,6406	0,6360	0,6310	0,6257	0,6203	0,6150	0,6101	0,6055	0,6013
14000	0,6389	0,6341	0,6291	0,6240	0,6190	0,6142	0,6097	0,6056	0,6019
14500	0,6370	0,6322	0,6274	0,6227	0,6181	0,6137	0,6097	0,6060	0,6027
15000	0,6351	0,6305	0,6260	0,6216	0,6175	0,6136	0,6100	0,6067	0,6037
16000	0,6320	0,6281	0,6244	0,6208	0,6174	0,6143	0,6114	0,6087	0,6063
17000	0,6304	0,6272	0,6241	0,6211	0,6184	0,6159	0,6136	0,6114	0,6094
18000	0,6300	0,6274	0,6249	0,6225	0,6203	0,6182	0,6163	0,6146	0,6130
19000	0,6307	0,6286	0,6265	0,6246	0,6228	0,6211	0,6195	0,6181	0,6169
20000	0,6351	0,6305	0,6260	0,6216	0,6175	0,6136	0,6100	0,6067	0,6037
21000	0,6343	0,6329	0,6315	0,6302	0,6289	0,6278	0,6268	0,6259	0,6251
22000	0,6369	0,6357	0,6346	0,6335	0,6325	0,6316	0,6308	0,6300	0,6293
23000	0,6398	0,6388	0,6379	0,6371	0,6363	0,6355	0,6348	0,6342	0,6336
24000	0,6430	0,6422	0,6415	0,6408	0,6401	0,6395	0,6389	0,6384	0,6379
25000	0,6465	0,6458	0,6452	0,6446	0,6440	0,6435	0,6431	0,6426	
26000	0,6501	0,6495	0,6490	0,6485	0,6480	0,6476			
27000	0,6537	0,6532	0,6528	0,6524					
28000	0,6574								

снаряда v_0, м/с

850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
0,5992	0,5954	0,5897	0,5820	0,5733	0,5652	0,5584	0,5532	0,5511	0,5495
0,6015	0,5962	0,5891	0,5809	0,5727	0,5655	0,5596	0,5551	0,5533	0,5520
0,6023	0,5959	0,5881	0,5799	0,5725	0,5661	0,5610	0,5572	0,5557	0,5546
0,6020	0,5948	0,5870	0,5793	0,5727	0,5671	0,5627	0,5594	0,5582	0,5572
0,6009	0,5934	0,5861	0,5791	0,5733	0,5684	0,5646	0,5618	0,5607	0,5599
0,5994	0,5922	0,5855	0,5793	0,5742	0,7000	0,5666	0,5642	0,5633	0,5626
0,5980	0,5914	0,5853	0,5799	0,5754	0,5718	0,5688	0,5667	0,5659	0,5653
0,5970	0,5910	0,5856	0,5808	0,5769	0,5737	0,5711	0,5693	0,5686	0,5680
0,5964	0,5910	0,5862	0,5820	0,5785	0,5757	0,5735	0,5719	0,5713	0,5708
0,5961	0,5913	0,5870	0,5834	0,5803	0,5778	0,5759	0,5745	0,5740	0,5736
0,5962	0,5919	0,5881	0,5849	0,5822	0,5801	0,5784	0,5771	0,5767	0,5763
0,5966	0,5928	0,5895	0,5866	0,5843	0,5824	0,5809	0,5798	0,5794	0,5791
0,5974	0,5940	0,5911	0,5885	0,5864	0,5847	0,5834	0,5824	0,5821	0,5818
0,5984	0,5954	0,5928	0,5905	0,5886	0,5871	0,5860	0,5851	0,5848	0,5846
0,5996	0,5969	0,5946	0,5926	0,5909	0,5896	0,5886	0,5878	0,5875	0,5873
0,6010	0,5985	0,5965	0,5947	0,5932	0,5920	0,5911	0,5905	0,5902	0,5900
0,6041	0,6022	0,6006	0,5991	0,5980	0,5970	0,5963	0,5958	0,5956	0,5954
0,6077	0,6062	0,6049	0,6037	0,6028	0,6020	0,6014	0,6010	0,6008	0,6007
0,6116	0,6104	0,6093	0,6084	0,6076	0,6070	0,6066	0,6062	0,6061	0,6060
0,6157	0,6147	0,6139	0,6131	0,6125	0,6120	0,6116	0,6114	0,6113	
0,6010	0,6192	0,6185	0,6179	0,6174	0,6170	0,6167			
0,6243	0,6237	0,6231	0,6226	0,6222					
0,6287	0,6282	0,6277	0,6273						
0,6331	0,6327								
0,6375									

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
0	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
500	0,2552	0,2552	0,2552	0,2552	0,2552	0,2553	0,2553	0,2555	0,2557
1000	0,2605	0,2605	0,2605	0,2605	0,2606	0,2608	0,2610	0,2613	0,2617
1500	0,2659	0,2659	0,2660	0,2661	0,2663	0,2666	0,2670	0,2674	0,2679
2000	0,2715	0,2716	0,2718	0,2720	0,2723	0,2727	0,2732	0,2737	0,2744
2500	0,2773	0,2776	0,2779	0,2782	0,2785	0,2791	0,2797	0,2803	0,2812
3000	0,2833	0,2837	0,2841	0,2845	0,2850	0,2857	0,2864	0,2872	0,2883
3500	0,2895	0,2900	0,2905	0,2910	0,2917	0,2925	0,2934	0,2945	0,2958
4000	0,2959	0,2965	0,2971	0,2978	0,2987	0,2996	0,3008	0,3022	0,3037
4500	0,3026	0,3033	0,3040	0,3049	0,3060	0,3071	0,3085	0,3102	0,3120
5000	0,3096	0,3104	0,3113	0,3124	0,3137	0,3150	0,3167	0,3187	0,3208
5500	0,3168	0,3178	0,3189	0,3203	0,3218	0,3233	0,3255	0,3277	0,3302
6000	0,3244	0,3256	0,3269	0,3285	0,3304	0,3322	0,3347	0,3371	0,3400
6500	0,3324	0,3338	0,3354	0,3372	0,3394	0,3417	0,3443	0,3470	0,3499
7000	0,3407	0,3424	0,3443	0,3464	0,3489	0,3515	0,3543	0,3571	0,3596
7500	0,3495	0,3515	0,3537	0,3561	0,3588	0,3616	0,3644	0,3669	0,3687
8000	0,3587	0,3610	0,3635	0,3662	0,3690	0,3718	0,3742	0,3760	0,3768
8500	0,3684	0,3710	0,3737	0,3765	0,3692	0,3816	0,3833	0,3841	0,3838
9000	0,3786	0,3813	0,3840	0,3866	0,3882	0,3906	0,3914	0,3912	0,3897
9500	0,3891	0,3917	0,3941	0,3962	0,3978	0,3986	0,3985	0,3972	0,3946
10000	0,3994	0,4017	0,4036	0,4049	0,4057	0,4056	0,4045	0,4022	0,3986
10500	0,4092	0,4110	0,4122	0,4126	0,4125	0,4115	0,4094	0,4062	0,4019
11000	0,4183	0,4194	0,4197	0,4193	0,4183	0,4164	0,4134	0,4095	0,4046
11500	0,4263	0,4266	0,4262	0,4250	0,4232	0,4204	0,4167	0,4121	0,4067
12000	0,4333	0,4328	0,4317	0,4298	0,4272	0,4237	0,4194	0,4143	0,4084
12500	0,4393	0,4381	0,4363	0,4338	0,4305	0,4264	0,4216	0,4161	0,4100
13000	0,4443	0,4424	0,4401	0,4370	0,4331	0,4285	0,4234	0,4177	0,4115
13500	0,4485	0,4460	0,4431	0,4395	0,4352	0,4303	0,4249	0,4191	0,4129
14000	0,4520	0,4490	0,4455	0,4415	0,4369	0,4318	0,4263	0,4204	0,4143
14500	0,4548	0,4514	0,4475	0,4431	0,4383	0,4331	0,4276	0,4217	0,4156

функции Сиаччи $f_6 = \dfrac{Y}{X \operatorname{tg} \theta_0}$

снаряда v_0, м/с									
850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
0,2559	0,2560	0,2562	0,2564	0,2566	0,2568	0,2571	0,2573	0,2575	0,2576
0,2620	0,2623	0,2627	0,2631	0,2635	0,2640	0,2646	0,2652	0,2655	0,2658
0,2683	0,2688	0,2694	0,2701	0,2708	0,2716	0,2726	0,2735	0,2736	0,2738
0,2750	0,2757	0,2765	0,2776	0,2786	0,2797	0,2809	0,2820	0,2814	0,2810
0,2820	0,2830	0,2840	0,2854	0,2867	0,2883	0,2895	0,2902	0,2886	0,2870
0,2893	0,2906	0,2920	0,2836	0,2953	0,2971	0,2982	0,2976	0,2949	0,2920
0,2971	0,2987	0,3005	0,3023	0,3043	0,3060	0,3064	0,3039	0,3002	0,2964
0,3054	0,3073	0,3095	0,3115	0,3135	0,3147	0,3135	0,3090	0,3047	0,3002
0,3141	0,3163	0,3187	0,3209	0,3225	0,3225	0,3194	0,3130	0,3083	0,3033
0,3232	0,3258	0,3282	0,3301	0,3307	0,3290	0,3241	0,3162	0,3112	0,3059
0,3328	0,3356	0,3374	0,3386	0,3377	0,3342	0,3278	0,3188	0,3137	0,3083
0,3427	0,3451	0,3461	0,3460	0,3435	0,3383	0,3308	0,3211	0,3160	0,3107
0,3524	0,3539	0,3540	0,3523	0,3482	0,3417	0,3332	0,3233	0,3184	0,3132
0,3614	0,3617	0,3606	0,3574	0,3520	0,3445	0,3354	0,3255	0,3207	0,3157
0,3694	0,3685	0,3660	0,3615	0,3550	0,3468	0,3375	0,3277	0,3231	0,3183
0,3763	0,3742	0,3703	0,3647	0,3575	0,3489	0,3395	0,3300	0,3255	0,3209
0,3821	0,3789	0,3739	0,3674	0,3596	0,3509	0,3415	0,3323	0,3280	0,3236
0,3869	0,3827	0,3768	0,3697	0,3616	0,3528	0,3436	0,3346	0,3305	0,3263
0,3908	0,3857	0,3792	0,3716	0,3634	0,3547	0,3458	0,3371	0,3331	0,3291
0,3940	0,3882	0,3812	0,3734	0,3652	0,3566	0,3480	0,3397	0,3359	0,3321
0,3966	0,3902	0,3829	0,3751	0,3670	0,3586	0,3503	0,3424	0,3388	0,3352
0,3987	0,3920	0,3846	0,3768	0,3688	0,3607	0,3527	0,3452	0,3417	0,3383
0,4004	0,3936	0,3862	0,3785	0,3707	0,3628	0,3552	0,3480	0,3447	0,3415
0,4020	0,3951	0,3878	0,3802	0,3727	0,3651	0,3578	0,3509	0,3478	0,3447
0,4035	0,3966	0,3894	0,3820	0,3747	0,3675	0,3605	0,3539	0,3509	0,3480
0,4049	0,3981	0,3911	0,3839	0,3768	0,3699	0,3632	0,3569	0,3541	0,3513
0,4064	0,3997	0,3929	0,3859	0,3790	0,3724	0,3660	0,3600	0,3573	0,3547
0,4078	0,4013	0,3947	0,3880	0,3813	0,3750	0,3689	0,3632	0,3606	0,3582
0,4093	0,4030	0,3966	0,3901	0,3838	0,3777	0,3719	0,3665	0,3640	0,3617

$c'X$	Начальные скорости								
	1300	1250	1200	1150	1100	1050	1000	950	900
15000	0,4570	0,4533	0,4492	0,4446	0,4396	0,4343	0,4288	0,4230	0,4170
16000	0,4602	0,4561	0,4516	0,4469	0,4419	0,4367	0,4312	0,4257	0,4201
17000	0,4625	0,4582	0,4537	0,4490	0,4441	0,4391	0,4339	0,4286	0,4234
18000	0,4644	0,4602	0,4557	0,4511	0,4464	0,4417	0,4368	0,4318	0,4269
19000	0,4662	0,4621	0,4578	0,4535	0,4491	0,4446	0,4400	0,4354	0,4308
20000	0,4681	0,4642	0,4602	0,4561	0,4520	0,4478	0,4435	0,4393	0,4351
21000	0,4703	0,4666	0,4629	0,4591	0,4552	0,4513	0,4474	0,4435	0,4396
22000	0,4728	0,4693	0,4658	0,4623	0,4587	0,4551	0,4516	0,4480	0,4444
23000	0,4755	0,4723	0,4690	0,4658	0,4625	0,4592	0,4560	0,4527	0,4494
24000	0,4786	0,4756	0,4726	0,4696	0,4666	0,4636	0,4606	0,4576	0,4547
25000	0,4820	0,4793	0,4765	0,4738	0,4710	0,4683	0,4655	0,4627	
26000	0,4857	0,4832	0,4807	0,4782	0,4756	0,4731			
27000	0,4896	0,4873	0,4850	0,4827					
28000	0,4938								

снаряда v_0, м/с									
850	800	750	700	650	600	550	500	475	450
0,4109	0,4048	0,3986	0,3923	0,3863	0,3805	0,3749	0,3698	0,3674	0,3652
0,4143	0,4085	0,4027	0,3970	0,3915	0,3862	0,3811	0,3765	0,3743	0,3724
0,4180	0,4126	0,4073	0,4021	0,3970	0,3921	0,3876	0,3834	0,3814	0,3796
0,4219	0,4170	0,4122	0,4074	0,4027	0,3983	0,3942	0,3904	0,3886	0,3870
0,4262	0,4217	0,4173	0,4129	0,4087	0,4047	0,4009	0,3975	0,3959	
0,4309	0,4268	0,4227	0,4187	0,4148	0,4112	0,4078			
0,4358	0,4320	0,4283	0,4247	0,4212					
0,4409	0,4374	0,4340	0,4308						
0,4462	0,4431								
0,4518									

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГЛАВНОГО

θ_0, град	v_0, м/с	Коэффи									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
5	600	0,987	991	993	994	994	993	992	991	990	990
	700	987	991	993	993	992	992	991	991	992	994
	800	988	988	989	988	988	989	989	990	991	991
	900	982	982	983	985	986	989	989	989	990	990
	1000	975	977	980	982	983	984	984	985	986	987
	1200	970	973	976	978	979	980	981	982	983	985
10	600	0,977	979	980	981	983	985	986	986	986	985
	700	966	969	971	973	976	978	980	981	982	982
	800	956	959	962	966	969	972	974	976	978	978
	900	942	948	953	958	962	965	968	971	973	975
	1000	927	937	944	949	953	957	961	965	968	970
	1200	902	914	924	939	938	943	949	954	958	961
15	600	0,957	964	967	968	968	968	967	967	967	967
	700	936	944	950	955	958	960	961	963	964	965
	800	910	920	930	939	946	950	953	955	958	960
	900	884	887	910	922	932	939	944	948	951	955
	1000	859	874	891	907	919	928	934	939	944	948
	1200	803	834	856	875	891	904	914	922	928	933
20	600	0,929	937	943	945	944	943	943	944	946	947
	700	893	908	920	928	934	937	939	940	942	945
	800	855	875	893	908	918	925	929	932	935	939
	900	814	843	867	886	900	910	917	923	928	932
	1000	775	808	837	862	882	895	904	912	918	923
	1200	699	743	782	815	842	863	878	889	898	905
25	600	0,897	910	916	916	915	915	917	921	925	929
	700	846	972	889	900	906	909	912	916	921	926
	800	793	827	856	877	888	895	901	907	913	918
	900	740	782	818	848	868	880	889	986	903	909
	1000	687	737	780	816	844	862	873	882	890	898
	1200	584	651	704	752	794	822	840	854	866	877
30	600	0,868	887	887	885	884	888	894	901	909	916
	700	803	837	861	871	876	881	888	896	904	911
	800	736	779	818	846	860	868	877	885	893	901
	900	666	722	770	810	835	849	860	870	880	889
	1000	599	665	720	770	807	828	841	853	865	876
	1200	478	557	624	687	742	782	806	821	834	849

КОЭФФИЦИЕНТА СИАЧЧИ β

циент c									
1,2	1,4	1,6	1,7	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0
0,991	993	994	994	995	995	995	996	997	997
994	994	994	995	995	995	995	996	997	997
992	993	993	994	994	995	996	996	997	997
991	992	992	993	993	994	995	996	997	997
988	989	990	991	992	994	995	996	996	997
986	987	988	989	990	992	993	995	996	996
0,985	986	986	987	987	988	989	992	995	997
983	984	984	985	986	988	990	993	995	997
979	980	982	983	984	987	989	993	995	996
977	979	981	982	983	986	988	992	994	995
973	976	978	980	981	984	987	991	993	995
965	969	972	975	977	981	985	989	992	994
0,969	971	973	975	977	982	986	992	996	999
967	970	972	974	976	981	985	991	995	998
960	963	966	969	971	979	982	988	993	997
957	960	964	965	969	979	980	987	992	996
954	958	962	962	968	978	979	987	992	995
941	948	954	959	962	970	975	984	989	993
0,952	958	963	967	971	979	986	995	1,001	1,005
951	956	261	965	969	977	983	992	0,999	004
946	952	957	962	966	974	980	990	998	003
940	947	953	958	962	971	978	989	996	002
932	940	947	953	958	968	976	987	995	001
917	936	936	944	950	962	971	984	992	0,999
0,938	947	955	962	968	980	989	1,001	1,009	1,015
937	947	955	961	965	977	986	0,999	1,008	1,014
929	939	948	955	961	973	982	996	1,006	1,014
920	931	941	949	956	970	980	994	1,004	1,013
912	924	935	944	951	966	977	992	1,003	1,012
895	909	921	931	940	958	971	989	1,000	1,009
0,929	941	952	962	970	986	997	1,014	1,025	1,033
925	937	948	958	966	982	994	1,011	1,023	1,032
917	931	942	952	960	977	990	1,009	1,022	1,031
906	921	934	945	955	974	987	1,006	1,020	1,030
985	912	926	938	948	968	983	1,003	1,018	1,029
874	893	909	923	935	968	975	0,999	1,015	1,027

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. Под редакцией Н. А. Златина и Г. И. Мишина. — М.: Наука, 1974.
2. Вентцель Д. А., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика, ч. III. М., Оборонгиз, 1939.
3. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика. — М.: Машиностроение, 1972.
4. Сборник таблиц для решения задач по внешней баллистике. — Пенза: ПВАИУ, 1971.
5. Таблицы стандартной атмосферы, ГОСТ 4401—73.
6. Чернозубов А. Д., Кириченко В. Д., Разин И. И., Михайлов К. В. Внешняя баллистика, ч. 1, П. — М.: Артиллерийская инженерная академия им. Ф. Э. Дзержинского, 1954.
7. Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. — М.: Оборонгиз, 1946.
8. Совкин Л. С., Лебедев Б. Д. Метеорология и стрельба артиллерии. — М.: Воениздат, 1974.
9. Прикладная аэродинамика. Под редакцией Н. Ф. Краснова. — М.: Высшая школа, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 4
1. Предмет и задачи внешней баллистики 4
2. Краткие сведения из истории внешней баллистики 6
3. Основные понятия и определения 13

Глава I. **Силы и моменты, действующие на снаряд в полете**

1.1. Сила тяжести 15
1.2. Строение атмосферы 17
1.3. Физические характеристики воздуха 18
1.4. Стандартные атмосферы 20
1.5. Аэродинамические силы, действующие на снаряд в полете . . 23
1.6. Сила лобового сопротивления. Коэффициент формы снаряда . 27
1.7. Ускорение силы сопротивления воздуха. Баллистический коэффициент снаряда 29
1.8. Общие зависимости для аэродинамических сил и моментов . . 30
1.9. Реактивные сила и момент 34
1.10. Ускорение реактивной силы 36
1.11. Полный импульс реактивной силы и единичный импульс двигателя 38

Глава II. **Составление дифференциальных уравнений движения снаряда**

2.1. Выбор системы координат 39
2.2. Дифференциальные уравнения движения центра масс снаряда 41
2.3. Дифференциальные уравнения движения снаряда около центра масс в координатах Крылова 43
2.4. Составление уравнений движения снаряда около центра масс в координатах Эйлера 45
2.5 Метод последовательных приближений при решении уравнений движения снаряда 47
2.6. Системы уравнений движения центра масс снаряда при различных аргументах 49

Глава III. **Методы решения основной задачи внешней баллистики**

3.1. Параболическая теория 51
3.2. Приближенные зависимости для прямого выстрела 55
3.3. Метод Эйлера 58
3.4. Таблицы Отто-Сиаччи 60
3.5. Метод Сиаччи 63
3.6. Интегрирование уравнений внешней баллистики по методу Рунге-Кутта 76
3.7. Интегрирование уравнений внешней баллистики по методу Мильна 80

Глава IV. **Теория поправок**

4.1. Предмет и методы 85
4.2. Табличные методы вычисления поправочных коэффициентов . 86
4.3. Вычисление поправочного коэффициента на изменение массы снаряда 89
4.4. Дифференцирование приближенных уравнений движения снаряда 90
4.5. Поправка на угол места цели 92
4.6. Закон подобия Ланжевена 94
4.7. Поправочная формула на изменение барометрического давления 97
4.8. Поправочная формула на изменение температуры 99

4.9 Влияние влажности воздуха на изменение параметров траектории 101
4.10. Поправка на ветер 103
4.11. Краткие сведения о таблицах стрельбы 107
4.12. Баллистические средние 109
4.13. Подготовка метеорологических данных 113

Глава V. **Движение снаряда около центра масс**

5.1. Движение снаряда, стабилизированного вращением 116
5.2. Движение снаряда на начальном участке траектории 119
5.3 Интегрирование уравнений движения снаряда в координатах Крылова 122
5.4. Влияние изменения скорости центра масс и демпфирующего момента на движение снаряда 130
5.5 Движение реактивного, стабилизированного вращением, и оперенного снарядов 132
5.6. Влияние кривизны трасктории на движение снаряда 136
5.7. Выбор крутизны нарезов 140
5.8 Определение необходимого наклона сопл 142

Глава VI. **Решение уравнений первого приближения**

6.1. Формирование начальных условий движения снаряда 144
6.2. Влияние движения снаряда около центра масс на рассеивание траекторий 150
6.3. Влияние запаса гироскопической устойчивости на рассеивание траекторий пуль 153
6.4. Вычисление деривации 155

Глава VII. **Экспериментальные методы внешней баллистики**

7.1. Измерение скоростей снарядов и пуль на баллистической трассе 159
7.2. Методика определения коэффициента лобового сопротивления по результатам баллистических стрельб 167
7.3. Определение аэродинамических коэффициентов нормальной силы и опрокидывающего момента 173
7.4. Исследование характеристик снарядов в аэродинамических трубах 180

Приложение I. Параметры стандартной атмосферы 189

Приложение II. Значения функции лобового сопротивления c_x (M) 191

Приложение III. Значения основных и вспомогательных функций Сиаччи 192

Приложение IV. Числовые значения главного коэффициента Сиаччи β 224

Рекомендуемая литература 226

Алексей Афанасьевич Коновалов
Юрий Васильевич Николаев

ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Редактор Ю. Е. Полетаев Технический редактор Е. П. Семенова

Сдано в набор 15.09.78. Подписано в печать 23.10.79. Печ. л. 14,25. Уч.-изд. л. 11,5
Формат 60×90/16. Работа 9243. Заказ 304/1/53

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
47	8-я снизу	где $R_x = P\cos\delta - R_т$.	где $R_x = P\cos\delta - R_т$.
118	3-я сверху	$\ddot{\delta} + \alpha^2\sigma\delta = 0$,	$\ddot{\delta} + \alpha^2\sigma\delta = 0$,
125	5-я снизу	$\frac{\dot{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}} = -\frac{1}{2\alpha^2}\frac{\dot{m}_1}{\delta} = \ldots$	$\frac{\dot{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}} = -\frac{1}{2\alpha^2}\frac{\dot{m}_1}{\sigma} = \ldots$